

Führt man die zeitliche Mitteilung über $0 \leq t \leq \tau$ aus, so wird

$$RI^2 \equiv \frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt \left\{ \int_0^\infty F_x J_x dy \right\} \\ = \frac{H_0^2}{4\pi} \frac{1}{\tau} \int_0^\infty [h(y, \tau) - \frac{1}{2}h^2(y, \tau)] dy. \quad (16)$$

Bezeichnet man mit h_r das reduzierte Magnetfeld beim reinen Skin-Effekt, so war $h(y, \tau) > h_r(y, \tau)$. Dann gilt für den Integranden in (16)

$$h_r - \frac{1}{2}h_r^2 < h - \frac{1}{2}h^2.$$

Da ferner $h(y, \tau) - \frac{1}{2}h^2(y, \tau) > 0$ für $0 < y < \infty$, wächst der Widerstand mit zunehmendem b . Setzt man eine der numerisch bestimmten Lösungen $h(y, \tau)$

in (16) ein, so ist damit die Möglichkeit gegeben, numerisch R zu errechnen.

Die hier erhaltenen Ergebnisse wurden mit Hilfe eines vereinfachten Modells gewonnen: Annahme des unendlichen Halbraums und sprunghaftes Einschalten des Magnetfeldes. Die bei den Experimenten vorliegende endliche Anstiegszeit des Magnetfeldes wird zwar die angegebenen numerischen Ergebnisse ändern, die vorhandene magnetische Widerstandsänderung modifiziert jedoch in jedem Falle den Skin-Effekt dahingehend, daß das Magnetfeld schneller in die Probe eindringt als es die MAXWELLSche Theorie vorhersagt.

Den Herren Professoren M. KOHLER und G. LAUTZ danke ich für wertvolle Diskussionen und der Deutschen Forschungsgemeinschaft für finanzielle Unterstützung.

Die Beweglichkeit der langsamen und schnellen Löcher in Indiumantimonid*

Von H. SCHÖNWALD

Forschungslaboratorium der Siemens-Schuckertwerke AG, Erlangen
(Z. Naturforsch. 19 a, 1276—1296 [1964]; eingegangen am 28. Februar 1964)

Die vorliegende Arbeit berichtet über Messungen von Leitfähigkeit und HALL-Koeffizient als Funktion der magnetischen Induktion B an verschiedenen dotierten InSb-Einkristallen bei hohen und tiefen Temperaturen. Aus der Widerstandsänderung im Magnetfeld von eigenleitendem Material kann die Beweglichkeit der Löcher für einen weiten Temperaturbereich berechnet werden. Das Anwachsen der Beweglichkeit mit zunehmender Temperatur oberhalb von 150°C zeigt, daß das bisherigen Rechnungen zugrunde gelegte Zweibandmodell für eigenleitendes InSb in diesem Temperaturbereich nicht verwendet werden kann. Deshalb wird untersucht, wie sich HALL-Koeffizient und Widerstandsänderung verhalten, wenn das Valenzband durch zwei Teilbänder mit verschiedenen Beweglichkeiten ersetzt wird.

Die gemessenen Werte können zwanglos durch gerechnete Kurven angeglichen werden, wenn zwischen 22°C und 492°C für die Beweglichkeit der schnellen Löcher Werte zwischen $3 \cdot 10^4 \text{ cm}^2/\text{Vsec}$ und $9,5 \cdot 10^3 \text{ cm}^2/\text{Vsec}$ und für das Konzentrationsverhältnis der schnellen und langsamen Löcher Werte zwischen 90 und 33 angenommen werden.

Bei der Temperatur 77°K werden elektrische Leitfähigkeit und HALL-Koeffizient von p-dotiertem InSb als Funktion der magnetischen Induktion und von einseitigem Druck und Zug untersucht. Unter dem Einfluß von Druck wird die elektrische Leitfähigkeit größer, die Widerstandsänderung im Magnetfeld kleiner, während der HALL-Koeffizient unverändert bleibt. Unter dem Einfluß von Zug sind die Effekte entgegengesetzt.

Ebenso wie bei hohen Temperaturen können die Meßpunkte durch gerechnete Kurven wiedergegeben werden, wenn für die HALL-Koeffizienten und Leitfähigkeiten der Teilbänder geeignete Werte angenommen werden. Diese Werte zeigen, daß durch einseitigen Druck oder Zug die Teilbänder gegeneinander verschoben werden und daß die Beweglichkeit der langsamen Löcher durch Druck größer und durch Zug kleiner wird.

Der am meisten untersuchte Verbindungshalbleiter der A^{III}B^V-Klasse ist Indiumantimonid. Die Verbindung zeichnet sich durch eine große Elektronenbeweglichkeit und die daraus folgenden ausgeprägten galvanomagnetischen Eigenschaften aus.

Über Messungen von Leitfähigkeit und HALL-Koeffizienten bei verschiedenen Temperaturen wurde zuerst im Jahre 1953 von WEISS¹ berichtet. Seit dieser Zeit ist eine Anzahl von Arbeiten zu diesem Thema erschienen. Es sei hier nur auf Berichte von

* Dissertation, Universität München 1964.

¹ H. WEISS, Z. Naturforsch. 8 a, 463 [1953].



HROSTOWSKI und Mitarbeiter², HILSUM und BARRIE³ und PUTLEY⁴ hingewiesen. Das Verhalten der Leitfähigkeit bei verschiedenen Temperaturen stimmt gut mit den zugrunde gelegten Modellen überein. Anders steht es jedoch mit der Widerstandsänderung im Magnetfeld. Es wurden meistens viel größere Werte gemessen, als sie von den Theorien vorhergesagt wurden. Im Jahre 1960 konnten dann WEISS und Mitarbeiter⁵ zeigen, daß die große Widerstandsänderung bei n-dotiertem InSb mit periodischen Dotierungsschwankungen des Präparats zusammenhängt. Weitere Untersuchungen von RUPPRECHT⁶, BOGNER und RUPPRECHT⁷, WEISS⁸, BATE und BEER⁹ sowie von HERRING¹⁰ befassen sich mit dem Einfluß von Inhomogenitäten auf die Widerstandsänderung. Es konnte gezeigt werden, daß der aus Potentialmessungen bestimmte Widerstand an inhomogenen Präparaten im Magnetfeld nicht nur größer, sondern auch kleiner und unter bestimmten Bedingungen sogar negativ werden kann⁸.

Die gemessene Widerstandsänderung an einem InSb-Stäbchen hängt also ab von der geometrischen Form der Meßprobe, der Verteilung der Störstellen in der Meßprobe, der Änderung der Beweglichkeiten der Ladungsträger und dem Mehrbandeffekt. Die letzten beiden Anteile können in vielen Fällen theoretisch erfaßt und deshalb für die Aufklärung von Halbleitereigenschaften herangezogen werden.

Fast alle bis jetzt vorliegenden Meßergebnisse beziehen sich auf den Bereich von 300 °K bis 4 °K. Zur Ergänzung dieser Messungen wurde die Widerstandsänderung von einer Reihe von reinen, p- und n-dotierten InSb-Proben in dem Bereich von Zimmertemperatur bis hinauf zum Schmelzpunkt gemessen. Um den Einfluß der Dotierungsschwankungen zu studieren, wurden die n-dotierten Proben so aus dem gezogenen Kristall herausgeschnitten, daß die Normale der Schichtstruktur senkrecht oder quer zur Längsrichtung der Probe stand.

Die Löcherbeweglichkeit von InSb wird im allgemeinen experimentell durch Messungen von Leitfähigkeit und HALL-Koeffizient an p-dotierten Proben bestimmt. Das Produkt beider Größen liefert die HALL-Beweglichkeit der Löcher, wenn die Temperatur so klein ist, daß der Einfluß der Elektronen vernachlässigt werden kann. Eine Möglichkeit zur Bestimmung der Löcherbeweglichkeit in eigenleitendem Material besteht, indem die physikalische Widerstandsänderung ausgewertet wird. Ist die Widerstandsänderung für Elektronen im Leitungsband sowie für Löcher im Valenzband vernachlässigbar klein, so gibt es eine einfache Beziehung zwischen Widerstandsänderung, magnetischer Induktion und den beiden Beweglichkeiten. Mit dieser Methode sollte es möglich sein, die Löcherbeweglichkeit von reinem InSb bis zum Schmelzpunkt zu erfassen.

Nun weist aber schon KANE¹¹ in seiner Arbeit über die Bandstruktur der A^{III}B^V-Verbindungen darauf hin, daß das Valenzband aus mehreren Teilbändern bestehen muß. Man wird also nicht mehr mit dem einfachen Zweibandmodell zur Deutung der galvanomagnetischen Effekte von eigenleitendem InSb rechnen dürfen, zumal das Band der schnellen Löcher einen ähnlichen, nichtparabolischen Verlauf wie das Leitungsband aufweist. Das Verhalten der Widerstandsänderung und auch des HALL-Koeffizienten wurde deshalb unter Verwendung eines Dreibandmodells bei verschiedenen Temperaturen untersucht.

Die komplizierte Struktur des Valenzbandes von InSb müßte auch bei p-leitenden Proben die Abhängigkeit der galvanomagnetischen Effekte von der magnetischen Induktion beeinflussen. Schon HROSTOWSKI und Mitarbeiter² haben vor dem Erscheinen der KANESchen Arbeit auf eine solche Möglichkeit hingewiesen. Damals war es nämlich WILLARDSON u. a.¹² gelungen, einen ähnlichen Verlauf des HALL-Koeffizienten von Germanium zu deuten, indem sie mit zwei Sorten von Defektelektronen rechneten. Später haben FREDERIKSE und HOSLER¹³ Messungen von p-leitendem InSb bei 77 °K disku-

² H. J. HROSTOWSKI, F. J. MORIN, T. H. GEBALLE u. G. H. WHEATLEY, Phys. Rev. **100**, 1672 [1955].

³ C. HILSUM u. R. BARRIE, Proc. Phys. Soc., Lond. **71**, 676 [1957].

⁴ E. H. PUTLEY, Proc. Phys. Soc., Lond. **73**, 280 [1958].

⁵ H. RUPPRECHT, R. WEBER u. H. WEISS, Z. Naturforschg. **15 a**, 783 [1960].

⁶ H. RUPPRECHT, Z. Naturforschg. **16 a**, 395 [1961].

⁷ G. BOGNER u. H. RUPPRECHT, Z. Naturforschg. **16 a**, 1152 [1961].

⁸ H. WEISS, J. Appl. Phys. **32**, 2064 [1961].

⁹ R. T. BATE u. A. C. BEER, Proc. Int. Conf. on Semiconductors, Prag, P. 177.

¹⁰ C. HERRING, J. Appl. Phys. **31**, 1939 [1960].

¹¹ K. O. KANE, J. Phys. Chem. Solids **1**, 249 [1957].

¹² T. C. HARMAN, R. K. WILLARDSON u. A. C. BEER, Phys. Rev. **95**, 699 [1954].

¹³ H. P. R. FREDERIKSE u. R. W. HOSLER, Phys. Rev. **108**, 1146 [1957].

tiert. Ohne auf Einzelheiten der Deutung einzugehen, teilen diese Autoren mit, daß der Verlauf der Meßkurven durch einen komplizierten Streumechanismus oder mit Hilfe von zwei Teilbändern zu deuten wäre. Dagegen meint CHAMPNESS¹⁴, daß die unter Annahme von Ionenstreuung berechnete Widerstandsänderung eines einfachen Valenzbandes stets zu kleine Werte liefert.

Bei Vorhandensein von zwei Sorten von Löchern wäre nun eine erste Aufgabe, die Konzentrationen und die Beweglichkeiten zu bestimmen. Einen Versuch in dieser Richtung führte CHAMPNESS¹⁵ in einer nachfolgenden Arbeit durch. Dieser Autor nimmt an, daß die Größen der Einzelbänder keine Abhängigkeit vom Magnetfeld haben sollen und berechnet Konzentrationen und Beweglichkeiten unter Verwendung der Gleichungen für HALL-Koeffizient und Widerstandsänderung im Magnetfeld sowie für verschwindendes Magnetfeld. Die so gefundenen Ergebnisse passen gut in das von KANE entworfene Modell des Valenzbandes.

Die oben zitierten Autoren berichten von Versuchen bei 77 °K. FISCHER¹⁶ untersucht den HALL-Effekt und die Widerstandsänderung an p-leitendem InSb von 77 °K bis 300 °K. Da mit zunehmender Temperatur das Leitungsband mehr und mehr zum Transportvorgang beiträgt, werden zur Auswertung Formeln für drei Energiebänder herangezogen. Bei tiefen Temperaturen lassen sich die Meßergebnisse gut deuten; die Methode scheitert aber bei höheren Temperaturen. Deshalb versucht FISCHER, seine Meßergebnisse unter Verwendung eines einfachen Bandes mit gemischtem Streumechanismus zu erklären, jedoch führte auch dieser Versuch nicht zum Erfolg.

Als Hilfsmittel zur Bestimmung der Bandstruktur einer Substanz wird häufig der Piezowiderstand herangezogen. Solche Messungen wurden seit 1957 auch für InSb durchgeführt. Man findet aus der Größe der Piezowiderstandskoeffizienten, daß der qualitative Verlauf des Valenzbandes von InSb mit dem des Germaniums übereinstimmen muß. Dagegen ist noch nicht untersucht worden, wie sich Widerstandsänderung und HALL-Koeffizient unter dem Einfluß von Zug- oder Druckspannungen verhalten. Durch die elastische Verformung wird die Gitterkonstante in einer Richtung verändert und die vor-

her kubische Symmetrie des Kristalls verschwindet. Daraus folgt dann aus gruppentheoretischen Überlegungen, daß Entartungen von Bändern in bestimmten Punkten der BRILLOUIN-Zone aufgehoben werden können. Es ist dann denkbar, daß die Teilbänder des Valenzbandes in ihrem Maximum nicht mehr zusammenfallen.

Zur Klärung dieser Frage wurden Messungen der elektrischen Leitfähigkeit und des HALL-Koeffizienten als Funktion der magnetischen Induktion für verschiedene Zug- und Druckspannungen an p-dotierten Stäbchen aus InSb bei 77 °K durchgeführt. Der Probenstrom floß dabei parallel zu den mechanischen Spannungen, die in der Längsachse der Stäbchen angelegt wurden.

I. Versuchsanordnung

a) Allgemeines

Zur Messung der Leitfähigkeit und des HALL-Koeffizienten wurde ein Rechteckwechselstrom mit der Frequenz 5 Hz durch die im Magnetfeld angeordnete quaderförmige oder zylindrische Probe geschickt. Die an den entsprechenden Potentialsonden auftretenden Spannungen wurden gleichgerichtet und mit einem Kompensator gemessen. Zur Erzeugung des Rechteckwechselstromes diente ein rotierender Umpoler¹⁷, der auch die Wechselspannung gleichrichtete. Mit Hilfe von zwei in Parallel- und Serienschaltung eingebauten Kondensatoren konnten die induzierten und von Thermokräften herkommenden Störspannungen herabgesetzt werden. Dieses Meßverfahren hat den Vorteil, daß einige durch einmaliges Umpolen von Strom- und Magnetfeldrichtung nicht zu unterdrückende thermomagnetische Effekte, die der HALL-Spannung überlagert sind, verschwinden. Außerdem wird die Meßzeit erheblich verkürzt. Einzelheiten zu diesen Störeffekten diskutiert LINDBERG¹⁸.

	Querschnitt [mm ²]	Länge [mm]	Sondenabstand [mm]
Bei tiefen Temperat. Bei hohen Temperat. und für Messungen unter einseitigem Druck	1,7 · 1,7 3 · 3	12 25	9 9
Für Messungen unter einseitigem Zug	3 mm Ø	16	6

Tab. 1. Maße der verwendeten Proben.

¹⁴ C. H. CHAMPNESS, J. Electron. Control **4**, 201 [1958].

¹⁵ C. H. CHAMPNESS, Phys. Rev. Letters **1**, 439 [1958].

¹⁶ G. FISCHER, Helv. Phys. Acta **23**, 463 [1960].

¹⁷ Dieser Apparat wurde mir freundlicherweise von Herrn H. MARTENS zur Verfügung gestellt, wofür ihm hier gedankt sei.

¹⁸ O. LINDBERG, Proc. IRE **40**, 1414 [1952].

Alle verwendeten Probenhalterungen sind mit mindestens vier Sonden ausgerüstet, weil dadurch die Effekte an mehreren Stellen der Probe gemessen werden können, und man so eine Aussage über die Probenhomogenität gewinnen kann. Um Fehlmessungen zu vermeiden, müssen die Sonden in genügendem Abstand von den Probenenden angeordnet werden. Bei Messung des HALL-Koeffizienten sind die Einflüsse der Probenenden bei Proben mit kleinem HALL-Winkel am größten. Diese Frage wurde von MASON, HEWITT und WICK¹⁹ sowie von LIPPMANN und KUERT²⁰ theoretisch behandelt. Die Ergebnisse dieser Autoren wurden durch eigene Messungen bestätigt. Die Probe ist demnach so zu dimensionieren, daß bei den kleinsten Werten der magnetischen Induktion noch keine Abweichungen der Meßwerte auftreten, wenn die Potentialsonden um ein kleines Stück zu den Enden hin verschoben werden. Das war bei den verwendeten Proben stets der Fall. Die Maße der Proben sind in Tab. 1 angegeben.

b) Erzeugung des Magnetfeldes

Zur Erzeugung des Magnetfeldes diente ein von H. HIERONYMUS berechneter und im Forschungslaboratorium hergestellter Elektromagnet. Die Polschuhe sind konisch, der kleinste Polschuhdurchmesser beträgt 100 mm. Der Abstand der Pole kann von 0 bis 50 mm durch Auswechseln von Distanzplatten im Joch verändert werden. Bei einem Abstand der Polschuhe von 20 mm erreicht man eine magnetische Induktion von 14 kGauß. Der Strom für das Magnetfeld wird mit einer Regelanlage konstant gehalten. Zur Messung des Feldes befindet sich in der Mitte eines Polschuhs eine durch eine Messingplatte geschützter HALL-Generator, der im Bereich von 2 bis 20 kGauß nach einem Protonenresonanzverfahren mit einer Genauigkeit von 1 Promille geeicht wurde²¹.

c) Meßanordnung für Temperaturen von 77 bis 350 °K

Die Messungen wurden mit einer ähnlichen Apparatur durchgeführt, wie sie in den einschlägigen Monographien ausführlich beschrieben werden. Gewöhnlich kühlt man einen Kupferzylinder mit flüssigem Stickstoff auf eine gewünschte Temperatur ab. An dem Kupferzylinder befindet sich eine Halterung mit der Probe. Die Halterung und ebenso die Probe nehmen dann annähernd die Temperatur des kalten Zylinders an. Zur Wärmeisolierung befindet sich diese Halterung in einem evakuierbaren Gefäß. Strahlung wird von einer gekühlten Abschirmung ferngehalten. Zur Aufnahme der Meßprobe dient ein mit einem Umlaufkanal für die Kühlflüssigkeit versehener Kupferrahmen. Diese Variante hat den Vorteil, daß kein nennenswerter Temperaturgradient in der Probenhalterung entsteht. Durch die metallischen Zuleitungen für das Thermoelement, die Potentialsonden und den Probenstrom sowie durch Er-

zeugung von JOULEscher Wärme in der Probe befindet sich diese stets auf einer etwas höheren Temperatur als die Umgebung.

d) Meßanordnung für Temperaturen oberhalb der Zimmertemperatur

Mit dieser Apparatur können Messungen im Bereich von 20 °C bis 1000 °C durchgeführt werden. Als Werkstoffe für die Probenhalterung wurden deshalb nur Quarz, Degussit, Molybdän und Wolfram verwendet. Abb. 1 zeigt die Probenhalterung mit dem Ofen. Die Probenhalterung befindet sich in einem geschlossenen, quaderförmigen Quarzgefäß, um das herum der aus Wolframheizstäben und Degussitplatten hergestellte Ofen angeordnet ist. Der Quarzbehälter soll verhindern, daß Verunreinigungen aus dem Ofen auf Teile der Probenhalterung und der Probe gelangen, weil dadurch die elektrische Isolation beeinträchtigt würde. Die für die Probenhalterung verwendete Quarzsorte hat auch bei 1000 °C noch einen genügend hohen spezifischen Widerstand, so daß Isolationsschwierigkeiten nicht zu erwarten sind. Als Material für Potentialsonden und Stromzuführungen wurde Molybdän benutzt, weil dieses Metall nur schwache Neigung zu Legierungsbildung mit den untersuchten Halbleitern zeigt. Ebenso wie für die Potentialmessung kommen für die Stromzuführung bei hohen Temperaturen nur Preßkontakte in Frage. Da es kein Federmaterial gibt, das bei 1000 °C noch genügend elastisch ist, wurden die Druckfedern außerhalb des Ofens angeordnet. Der Meßeinsatz mit dem Ofen befindet sich in einem wassergekühlten, evakuierbaren Messingkasten von 35 mm Dicke. Da eine Schutzgasfüllung gegenüber Vakuum den Vorteil hat, daß sich das thermische Gleichgewicht schneller einstellt, wurde bei den Messungen Argon in die Apparatur eingefüllt. Die Messungen wurden sowohl von niedrigen als auch von hohen Temperaturen ausgehend durchgeführt, um gegebenenfalls eine Veränderung der Probe feststellen zu können. Bei InSb mit einem Schmelzpunkt bei 523 °C wurden die Messungen stets reproduziert.

e) Probenhalterung zur Messung von galvanomagnetischen Effekten unter der Einwirkung von einseitigem Druck von 77 °K bis 800 °K

Diese speziell für den Bereich von 20 °C bis 500 °C entworfene Probenhalterung wurde so gebaut, daß sie in das Quarzgefäß der oben beschriebenen Apparatur für hohe Temperaturen eingebaut werden kann. Da auf die Probe ein Druck in Längsrichtung ausgeübt werden soll, mußte diese senkrecht angeordnet werden. Abb. 2 zeigt die Halterung. Die Probe befindet sich in den mit Quarzplatten ausgekleideten quaderförmigen Hohlraum des aus Molybdän gefertigten Rahmens. Der Druck wird über Spitzen und Pfannen auf

¹⁹ W. P. MASON, H. W. H. HEWITT u. R. F. WICK, J. Appl. Phys. **24**, 166 [1953].

²⁰ H. J. LIPPMANN u. F. KUERT, Z. Naturforsch. **13a**, 464 [1958].

²¹ Die Eichung des HALL-Generators wurde von Herrn H. HIERONYMUS durchgeführt, wofür ihm besonders gedankt sei.

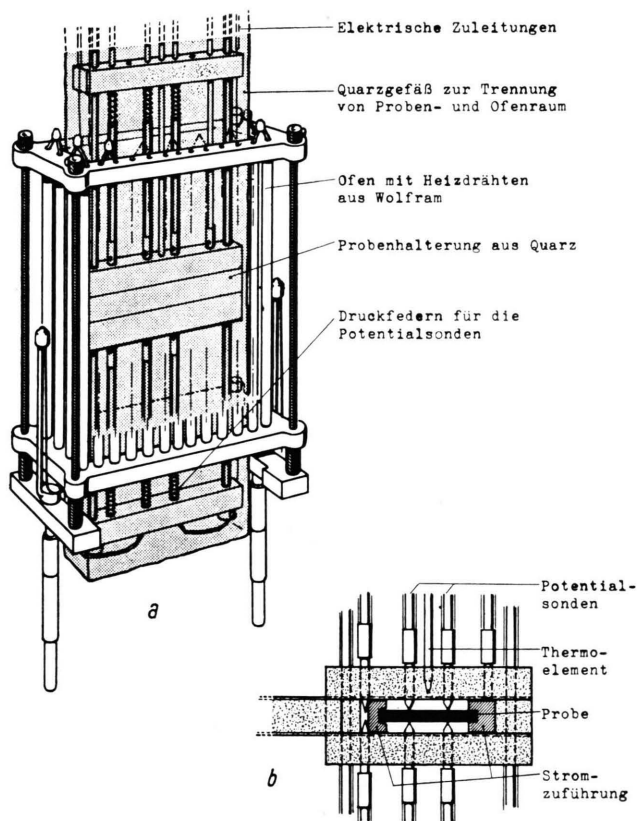


Abb. 1. a: Apparatur zur Messung von Leitfähigkeit und HALL-Koeffizient im Bereich von 20 bis 1000 °C; b: Ausschnitt von a mit der Anordnung der Probe.

die Probe übertragen. Die obere Spitze sitzt fest im Rahmen, auf die untere wird über ein Seil von außen ein Zug übertragen. Das Seil führt über Rollen zu einem Gestell, das mit Massen bis zu 50 kg belastet werden kann. Zur Vermeidung von Trägheitskräften kann das Gestell mit einer Spindel langsam gehoben und gesenkt werden. Die Temperatur wird am Molybdänrahmen mit einem Thermoelement gemessen.

f) *Apparatur zur Messung von galvanomagnetischen Effekten unter Einwirkung von einseitigem Zug unterhalb 400 °K*

Zur Erzeugung der Zugspannung in Längsrichtung der Probe muß diese an beiden Enden fest eingespannt werden. Dazu wurde die Probe auf die in Abb. 3 dargestellte Form geschliffen. An die kegelförmigen Enden können entsprechend geformte Haltestücke angreifen. Die Kugelgelenke garantieren, daß die Probe in Längsrichtung gleichmäßig beansprucht wird. Zur Fixierung der Probe in axialer Richtung dient eine Feder, die die Probe fest in die Halterung preßt. Als Potentialsonden wurden wegen des kreisförmigen Querschnitts der Probe Schneiden verwendet. Diese gewährleisten, daß der für die Messung der HALL-Spannung richtige

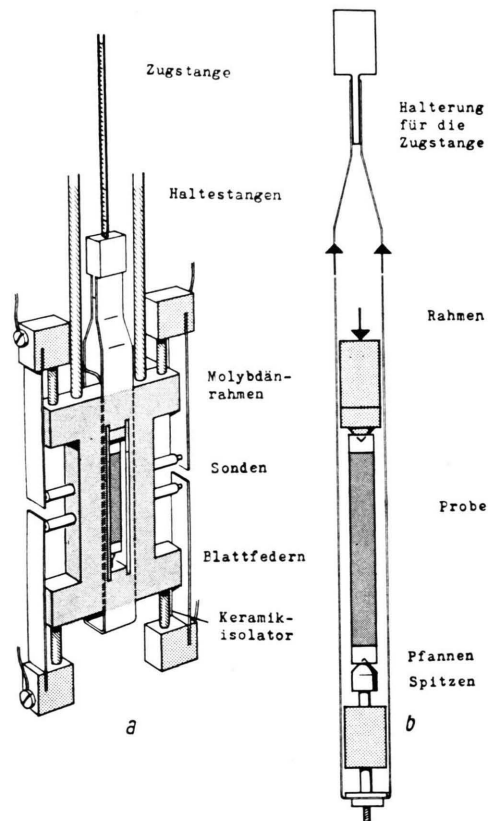


Abb. 2. a: Apparatur zur Messung von galvanomagnetischen Effekten unter Einwirkung von Druckspannungen; b: schematische Darstellung der Spannvorrichtung.

Abstand der Sonden immer eingehalten wird. Die Sonden sind nicht wie üblich einzeln federnd angeordnet, sondern zu zweien in einem Block aus Plexiglas eingepreßt. Der Block wird als eine Einheit mit Hilfe von Federn axial und radial fixiert. Zur Messung bei 77 °K wird die Halterung, ebenso wie die oben für die Druckmessung beschriebene, in flüssigen Stickstoff eingetaucht. Dieser befindet sich in einem wärmeisolierten schmalen Blechbehälter. Die Zugspannung wird ebenso wie bei der Apparatur für die Druckmessung erzeugt.

II. Messungen von Widerstandsänderung und Hall-Effekt bei hohen Temperaturen

Die Messungen wurden in der Weise durchgeführt, daß bei einer bestimmten Temperatur immer die Abhängigkeit eines Effektes von der magnetischen Induktion im Bereich von 1 bis 10 kGauß bestimmt wurde. Tab. 2 gibt eine Übersicht über den Störstellengehalt der gemessenen Proben. Die mit K bezeichneten, dotierten Kristalle wurden mit

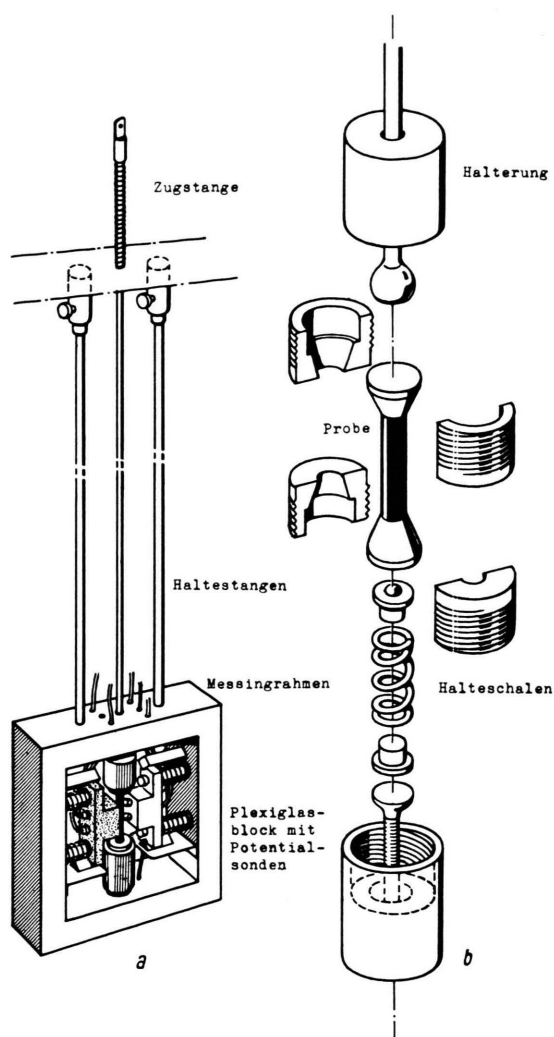


Abb. 3. a: Apparatur zur Messung von galvanometrischen Effekten unter Einwirkung von Zugspannungen; b: Spannungsvorrichtung für die Probe.

einem in der [111]-Richtung orientierten Keim aus der Schmelze gezogen (Verfahren nach CZOCHRALSKI). Die Schmelze des Kristalls 286 dagegen ist zunächst durch Zonenziehen im Schiffchen gereinigt worden. Durch einseitiges Abkühlen erstarrte die Schmelze zum Einkristall²².

Abb. 4 zeigt den Verlauf der Widerstandsänderung von 20 °C bis 500 °C bei der magnetischen Induktion $B = 10$ kGauß. Die Widerstandsänderung der eigenleitenden Probe 286 beträgt bei 20 °C 60%

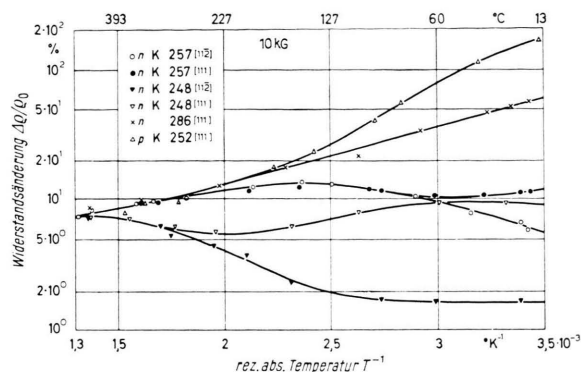


Abb. 4. Widerstandsänderung von InSb-Einkristallen verschiedener Dotierung und Orientierung in Abhängigkeit von der Temperatur.

und fällt dann mit steigender Temperatur auf 7,8% bei 492 °C ab. Alle Kurven von dotierten Proben münden in die der Eigenleitung ein. p-dotiertes InSb hat bei Zimmertemperatur immer eine größere Widerstandsänderung als eigenleitendes. Dieses bekannte Verhalten zeigt auch die Probe K 252. Mit zunehmender Temperatur wird aber die Widerstandsänderung rasch kleiner. Wie ein Vergleich mit dem in Abb. 5 dargestellten HALL-Koeffizienten zeigt, ist bei hohen Temperaturen der Einfluß der

Probe	Orientierung	R bei 77°K [cm ³ /A · sec]	$(N_D - N_A)$ bei 77°K [cm ⁻³]	Leitungstyp
K 248	[112]	20	$3,1 \cdot 10^{17}$	n
K 248	[111]	20	$3,1 \cdot 10^{17}$	n
K 257	[112]	140	$4,5 \cdot 10^{16}$	n
K 257	[111]	120	$5,2 \cdot 10^{16}$	n
K 252	[111]	140	$4,5 \cdot 10^{16}$	p
286	[111]	$1,56 \cdot 10^5$	$4 \cdot 10^{13}$	n

Tab. 2. Eigenschaften der Proben.

²² Die Kristalle wurden von Herrn Dr. M. WILHELM und seinen Mitarbeitern hergestellt. Ihnen allen sei hier für ihre Mühe herzlich gedankt.

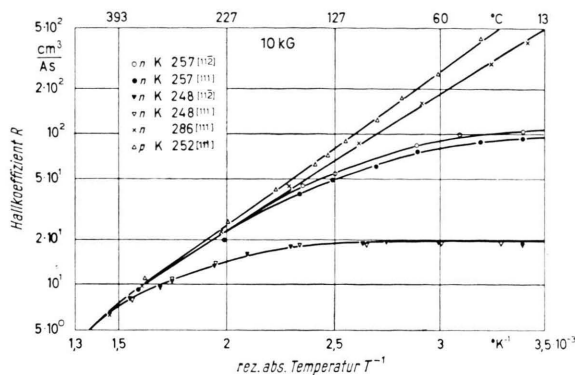


Abb. 5. HALL-Koeffizient von InSb-Einkristallen verschiedener Dotierung und Orientierung in Abhängigkeit von der Temperatur.

p-Dotierung auf die Widerstandsänderung geringer als auf den HALL-Koeffizienten. Während die Widerstandsänderung schon den Wert von eigenleitendem InSb angenommen hat, verläuft die Kurve des HALL-Koeffizienten noch oberhalb der Eigenleitungsgraden.

Die einzige bekannte Messung der Widerstandsänderung bei hohen Temperaturen wurde von CHAMPNESS¹⁴ an einer p-dotierten Probe ($N_A - N_D = 2 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$) bis 300°C durchgeführt. Berücksichtigt man die etwas schwächere Dotierung der von CHAMPNESS verwendeten Probe und die kleinere Induktion, bei der die Messung durchgeführt wurde, so ist die Übereinstimmung nur bei Zimmertemperatur gut. Bei höheren Temperaturen im Bereich der Eigenleitung liegt der Wert von CHAMPNESS um 30% höher.

WEISS u. a.⁵ hatten festgestellt, daß die Widerstandsänderung von n-dotiertem InSb immer dann am größten ist, wenn die Probenrichtung mit der Ziehrichtung des Kristalls identisch ist. Dieser Befund wurde durch eine periodische Dotierungsschwankung des Kristalls in der Ziehrichtung erklärt. Die Kurven der n-dotierten Probe bestätigen diese Annahme. Mit zunehmender Temperatur, also mit abnehmendem Einfluß der Störleitung, wird der Unterschied der verschieden orientierten Proben geringer. Damit ist in Einklang, daß die Aufspaltung der Kurven der stärker dotierten Probe K 248 bei 315°C verschwindet, die der Probe K 257 dagegen schon bei 60°C . Wenn man davon absieht, daß auch bei den in der $[11\bar{2}]$ -Richtung orientierten Proben noch ein geringer Anteil strukturbedingter Widerstandsänderung vorhanden sein kann, zeigen

diese Proben die echte Widerstandsänderung von n-dotiertem InSb im Gebiet der gemischten Leitung. Entsprechend der Zunahme der Löcherdichte wird die Widerstandsänderung der Probe K 257 mit zunehmender Temperatur größer. Dann wirkt sich die Abnahme der Elektronenbeweglichkeit stärker aus, die Widerstandsänderung wird wieder kleiner. Die echte Widerstandsänderung der stärker dotierten Probe 248 nimmt im Gebiet der Zimmertemperatur nur schwach mit zunehmender Temperatur zu, weil das Verhältnis der Elektronen- zur Löcherkonzentration hier erst bei höheren Temperaturen klein genug wird.

Ebenso wie bei Zimmertemperatur ist auch bei höheren Temperaturen der HALL-Koeffizient unabhängig davon, wie die Probe aus dem Kristall herausgeschnitten wurde. Die Messungen sind in Übereinstimmung mit denen anderer Autoren. Die geringe Abweichung zwischen den beiden Proben K 257 ist darauf zurückzuführen, daß die Proben an verschiedenen Stellen des gezogenen Kristalls herausgeschnitten wurden.

Abb. 6 zeigt die Abhängigkeit der Widerstandsänderung der eigenleitenden Probe 286 von der magnetischen Induktion. Bei 22°C nimmt diese ungefähr quadratisch mit der magnetischen Induktion

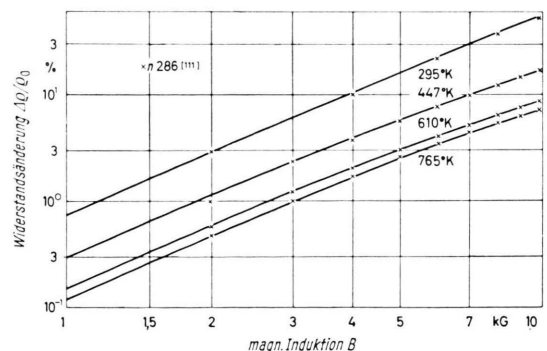


Abb. 6. Widerstandsänderung von eigenleitendem InSb bei verschiedenen Temperaturen in Abhängigkeit von der magnetischen Induktion.

zu. Bei höheren Temperaturen ist das quadratische Gesetz nur bei kleinen Feldern erfüllt. Mit zunehmender Induktion wird die Zunahme schwächer. Da die einfache Zweibandtheorie ein quadratisches Gesetz fordert, weist dieses Ergebnis auf einen anderen Mechanismus hin.

Eine Abhängigkeit des HALL-Koeffizienten von der magnetischen Induktion von n-dotierten Proben

im Gebiet der gemischten Leitung wurde bei Feldern unterhalb von 10 kGauß bisher noch nicht gefunden. Jedoch ergibt sich bei einem Vergleich von Messungen an verschiedenen Proben, die in der Nähe des Schmelzpunktes durchgeführt wurden, eine schwache Abnahme des HALL-Koeffizienten. Dieser Effekt könnte aber auch mit einem systematischen Fehler in der Meßanlage zusammenhängen. Zur Klärung dieser Frage sind noch weitere Untersuchungen nötig. Der HALL-Koeffizient der p-dotierten Probe nimmt mit zunehmender Induktion ab. Wie zu erwarten war, wird bei höheren Temperaturen die Abnahme schwächer.

In Abb. 7 ist die Widerstandsänderung der n- und der p-dotierten Proben aufgetragen. Bei p-Dotierung ist wieder bei kleinen Feldern das quadratische Gesetz erfüllt, mit zunehmender Induktion wird der Anstieg schwächer. Da die Widerstandsänderung

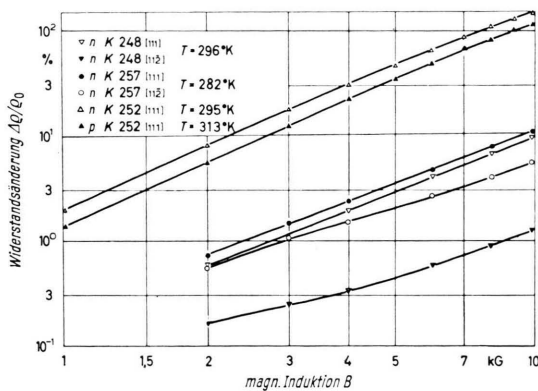


Abb. 7. Widerstandsänderung von p- und n-dotiertem InSb bei verschiedenen Temperaturen in Abhängigkeit von der magnetischen Induktion.

unterhalb von 1% schwierig zu messen ist, wurde sie für die n-leitenden Proben erst ab 2 kGauß aufgetragen. Die Proben mit sturkturbedingter Widerstandsänderung zeigen über den ganzen Bereich der Induktion einen Anstieg proportional zu B^2 . Dagegen wird bei den senkrecht zur Ziehrichtung geschnittenen Proben K 257 [112] und K 248 [112] der Anstieg mit zunehmender Induktion zunächst kleiner, dann wieder größer. Dieses Verhalten deutet darauf hin, daß bei kleiner Induktion noch ein zweiter Mechanismus zur Widerstandsänderung beiträgt. Vermutlich ist der Widerstandsänderung der gemischten Leitung noch ein strukturbedingter Anteil überlagert.

III. Die Löcherbeweglichkeiten von eigenleitendem InSb bei hohen Temperaturen

Zur exakten Beschreibung der galvanomagnetischen Effekte geht man ebenso wie bei allen anderen Transportgrößen von der BOLTZMANN-Gleichung aus. Diese liefert die Verteilungsfunktion der Ladungsträger bei Einwirkung eines elektrischen und magnetischen Feldes. Sobald die Verteilungsfunktion bekannt ist, können die Transportkoeffizienten berechnet werden. Da für den allgemeinen Fall die Rechenarbeit sehr umfangreich ist, beschränkt man sich meistens auf die einfacheren Spezialfälle sehr kleiner und sehr großer Magnetfelder. Bei kleinen Magnetfeldern sind aber die Effekte im allgemeinen sehr klein und deshalb nur ungenau zu messen. Das Gebiet der hohen Magnetfelder dagegen ist experimentell schwer zugänglich.

Praktisch wird der Vergleich mit der Theorie in der Weise durchgeführt, daß man für die zur Berechnung benötigten Parameter zunächst plausible Annahmen macht und dann die interessierenden Transportkoeffizienten berechnet. Solche Parameter sind: die Abhängigkeit der Energie vom Wellenzahlvektor, die Lage des FERMI-Niveaus und die Abhängigkeit der Stoßzeit von der Energie. Die Ausgangswerte werden dann so lange variiert, bis eine befriedigende Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment erreicht ist.

Tragen zu einem Transportvorgang mehrere Energiebänder bei, d. h. gibt es mehrere Gruppen von Ladungsträgern im Festkörper, so können die Transportgrößen für jedes Einzelband nach dem oben angegebenen Verfahren berechnet werden. Die Effekte der Einzelbänder überlagern sich zu einem Gesamteffekt. Ein Verfahren zur Berechnung der Gesamteffekte wurde von CHAMBERS²³ angegeben²⁴.

Unabhängigkeit von der Art der Ladungsträger gilt für den spezifischen Widerstand und den HALL-Koeffizienten eines Leiters mit drei Energiebändern, wenn jede Ladungsträgersorte durch eine spezifische elektrische Leitfähigkeit $\sigma_i(B)$ und einen HALL-Koeffizienten $R_i(B)$ charakterisiert wird:

$$\varrho(B) = \frac{a + b B^2 + c B^4}{a^2 + h B^2 + l B^4}, \quad (3,1)$$

$$R(B) = \frac{d + f B^2 + g B^4}{a^2 + h B^2 + l B^4}; \quad (3,2)$$

²³ R. G. CHAMBERS, Proc. Phys. Soc., Lond. **65 A**, 903 [1952].

²⁴ Im Anhang ist eine einfache Ableitung solcher Formeln für den HALL-Koeffizienten und die elektrische Leitfähigkeit bei beliebig starker Induktion und für beliebig viele Bänder durchgeführt.

$$\begin{aligned}
a &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \\
b &= \sigma_1^2 R_1^2 (\sigma_2 + \sigma_3) + \sigma_2^2 R_2^2 (\sigma_3 + \sigma_1) \\
&\quad + \sigma_3^2 R_3^2 (\sigma_1 + \sigma_2), \\
c &= \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 (\sigma_2 \sigma_3 R_2^2 R_3^2 \\
&\quad + \sigma_1 \sigma_3 R_1^2 R_3^2 + \sigma_1 \sigma_2 R_1^2 R_2^2), \\
d &= \sigma_1^2 R_1 + \sigma_2^2 R_2 + \sigma_3^2 R_3, \\
f &= \sigma_1^2 R_1 (\sigma_2^2 R_2^2 + \sigma_3^2 R_3^2) + \sigma_2^2 R_2 (\sigma_1^2 R_1^2 \\
&\quad + \sigma_3^2 R_3^2) + \sigma_3^2 R_3 (\sigma_1^2 R_1^2 + \sigma_2^2 R_2^2), \\
g &= \sigma_1^2 \sigma_2^2 \sigma_3^2 R_1 R_2 R_3 (R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3), \\
h &= \sigma_1^2 \sigma_2^2 (R_1 + R_2)^2 + \sigma_1^2 \sigma_3^2 (R_1 + R_3)^2 \\
&\quad + \sigma_2^2 \sigma_3^2 (R_2 + R_3)^2 + 2(\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3^2 R_3^2 + \sigma_1 \sigma_3 \sigma_2^2 R_2^2 \\
&\quad + \sigma_2 \sigma_3 \sigma_1^2 R_1^2), \\
l &= \sigma_1^2 \sigma_2^2 \sigma_3^2 (R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3)^2. \quad (3,3)
\end{aligned}$$

Die Leitfähigkeit ist stets positiv, der HALL-Koeffizient für Elektronen negativ, für Löcher positiv einzusetzen.

Für den Spezialfall, daß die Stoßzeit von der Energie unabhängig ist und beide Bänder parabolische Form haben, sind σ_i und R_i von B unabhängig. Die Formeln (3,3) können dann als Funktion der Ladungsträgerdichten und der Beweglichkeiten der Einzelbänder geschrieben werden; sie sind mit den von FISCHER¹⁶ angegebenen identisch. Die bekannten Zweibandformeln folgen aus (3,3), wenn $\sigma_3 = 0$ gesetzt wird.

$$\varrho(B) = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_2 (\sigma_1 R_1^2 + \sigma_2 R_2^2) B^2}{(\sigma_1 + \sigma_2)^2 + \sigma_1^2 \sigma_2^2 (R_1 + R_2)^2 B^2}, \quad (3,4)$$

$$R(B) = \frac{\sigma_1^2 R_1 + \sigma_2^2 R_2 + \sigma_1^2 \sigma_2^2 R_1 R_2 (R_1 + R_2) B^2}{(\sigma_1 + \sigma_2)^2 + \sigma_1^2 \sigma_2^2 (R_1 + R_2)^2 B^2}. \quad (3,5)$$

Da die Elektronenbeweglichkeit von InSb ungefähr 100-mal so groß wie die Löcherbeweglichkeit ist, kann nach (3,4) und (3,5) durch das Produkt von HALL-Koeffizient und Leitfähigkeit im Gebiet der gemischten Leitung immer nur die Elektronenbeweglichkeit bestimmt werden. Aus diesem Grund ist bis jetzt die Löcherbeweglichkeit nur von p-dotiertem InSb aus dem Produkt von R und σ bestimmt worden. Um den Einfluß der gemischten Leitung auszuschließen, müssen zur Bestimmung der Löcherbeweglichkeit bei höheren Temperaturen sehr stark dotierte Proben verwendet werden. Da aber die Beweglichkeit wegen der Ionenstreuung von der Stärke der Dotierung abhängt, bekommt man auf diese Weise nicht die Gitterbeweglichkeit der Löcher in reinem InSb.

²⁵ J. KOŁODZIEJCZAK u. R. KOWALCZYK, Acta Phys. Polon. **21**, 389 [1962].

Eine zweite Möglichkeit zur Bestimmung der Löcherbeweglichkeit bietet die Auswertung der Widerstandsänderung der gemischten Leitung von eigenleitenden Proben. Wenn eine Widerstandsänderung im Leitungs- und Valenzband vernachlässigt werden kann, folgt aus (3,5) für die Widerstandsänderung der einfache Zusammenhang

$$\Delta \varrho / \varrho_0 = \mu_n \mu_p B^2. \quad (3,6)$$

Da bei eigenleitendem InSb eine von der Verteilung der Störstellen abhängige Widerstandsänderung nicht vorhanden ist, kann aus (3,6) die Löcherbeweglichkeit von eigenleitendem InSb berechnet werden. Die Ergebnisse dieser Berechnung sind in Abb. 8, Kurve 1, für den Grenzwert verschwindender

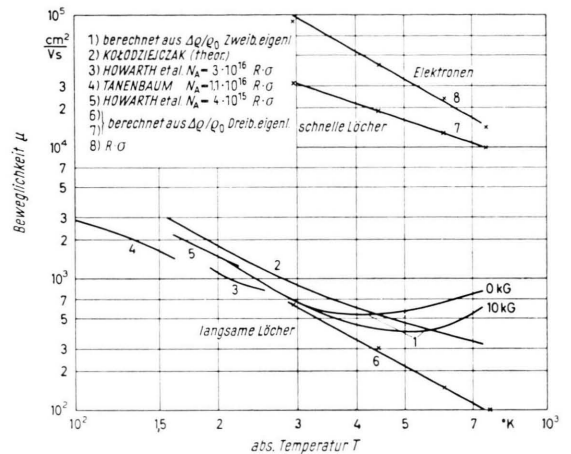


Abb. 8. Beweglichkeiten von InSb.

magnetischer Induktion und für $B = 10$ kGauß dargestellt. Bei tiefen Temperaturen ist die Grenze der Methode durch Einsetzen der Störleitung begrenzt. Es wurden deshalb die Meßergebnisse der sehr reinen Probe 286 benutzt, an der Messungen bis 77 °K durchgeführt wurden. Die Abb. 8 enthält noch Bestimmungen von Löcherbeweglichkeiten anderer Autoren. Die Kurve 2 stammt aus einer theoretischen Arbeit von KOŁODZIEJCZAK²⁵. Bei tiefen Temperaturen ist die Übereinstimmung dieser berechneten Kurve mit den experimentellen Werten recht gut, bei hohen dagegen liefert die Theorie zu große Werte. Die Kurven 3 und 5 sind einer Arbeit von HOWARD, JONES und PUTLEY²⁶ entnommen und die Kurve 4 einer Arbeit von TANENBAUM und MAITA²⁷.

²⁶ D. J. HOWARTH, R. H. JONES u. E. H. PUTLEY, Proc. Phys. Soc., Lond. **70 B**, 124 [1957].

²⁷ M. TANENBAUM u. J. P. MAITA, Phys. Rev. **91**, 1009 [1953].

Diese Beweglichkeiten wurden aus dem Produkt von R und σ bestimmt. Die aus der Widerstandsänderung in der Eigenleitung berechnete Löcherbeweglichkeit schließt sich gut an die an p-leitenden Proben aus $R \cdot \sigma$ bestimmten Werte an, auch die Abhängigkeit von der Temperatur verläuft nach demselben Exponentialgesetz. Der Exponent wird von HILSUM²⁸ mit $-2,1$ angegeben. Oberhalb von 350°K fällt die aus der Widerstandsänderung in der Eigenleitung berechnete Löcherbeweglichkeit (Kurve 1) jedoch schwächer ab und steigt schließlich wieder an; außerdem wird sie von der magnetischen Induktion abhängig.

In diesem Temperaturbereich wird die Beweglichkeit durch Streuung an Gitterschwingungen bestimmt. Mit zunehmender Temperatur wird die Streuung stärker und die Löcherbeweglichkeit müßte ebenso wie die Elektronenbeweglichkeit weiter absinken. Die berechnete Kurve kann also nicht die wahre Löcherbeweglichkeit darstellen. Diese folgt vermutlich demselben Exponentialgesetz wie bei Zimmertemperatur, denn auch die Temperaturabhängigkeit der Elektronenbeweglichkeit läßt sich im gesamten betrachteten Temperaturbereich mit nahezu konstantem Exponenten darstellen. Die Löcherbeweglichkeit für 765°K wird dann durch Extrapolation zu $100\text{ cm}^2/\text{Vsec}$ bestimmt. Die Elektronenbeweglichkeit beträgt $13\,600\text{ cm}^2/\text{Vsec}$. Für $B = 10\text{ kGauß}$ errechnet sich nach (3,6) für die Widerstandsänderung ein Wert von $1,3\%$; der gemessene Wert ist aber $7,8\%$. Dieses Ergebnis zeigt, daß bei hohen Temperaturen das zugrunde gelegte Zweibandmodell versagt.

Man könnte zur Erklärung daran denken, eine etwa vorhandene Widerstandsänderung im Leitungsband oder bei hohen Temperaturen das Vorhandensein von zwei Valenzbändern zu berücksichtigen. Wegen der Abweichung des Bandes der schnellen Löcher vom parabolischen Verlauf wird das Verhältnis der Löcherkonzentrationen in den beiden Teilbändern geändert und das Band trägt in zunehmendem Maße zur Widerstandsänderung bei.

Eine Widerstandsvergrößerung im Leitungsband ist gleichbedeutend mit einer Verkleinerung der Elektronenbeweglichkeit. Die Formel (3,6) kann in diesem Fall zur Berechnung der Widerstandsänderung nicht mehr benutzt werden, weil bei ihrer Ab-

leitung eine Widerstandsänderung im Leitungsband ausgeschlossen wurde. Für den relativen Gesamtwiderstand ergibt sich näherungsweise aus (3,4)

$$\frac{\rho_B}{\rho_0} = \frac{\sigma_0(1 + \sigma_n \sigma_p R_n^2 B^2)}{\sigma_n} \quad (3,7)$$

Mit dieser Formel kann abgeschätzt werden, wie stark eine Verkleinerung von σ_n den Gesamtwiderstand verringert. Maßgebend ist, ob der Ausdruck $\sigma_n \sigma_p R_n^2 B^2$ gegen 1 vernachlässigt werden kann. Für $T = 714^\circ\text{K}$ ergibt sich: $\sigma_n^0 = 2500\ \Omega^{-1}\text{ cm}^{-1}$, $\sigma_p^0 \approx 50\ \Omega^{-1}\text{ cm}^{-1}$, $R_n^2 \approx 35[\text{cm}^3/\text{A sec}]^2$, $B^2 \leq 10^{-8} [\text{V sec/cm}^2]^2$.

Damit folgt $\sigma_n \sigma_p R_n^2 B^2 \leq 4,4 \cdot 10^{-2}$. Eine Verringerung von σ_n verändert also im wesentlichen nur den Nenner von (3,7). Eine Vergrößerung der Widerstandsänderung läßt sich also durch eine entsprechende, relativ schwache Änderung der Beweglichkeit im Leitungsband erreichen.

Aus den Arbeiten von KANE weiß man jedoch, daß nicht nur ein einziges Valenzband existiert, sondern daß man mit zwei Valenzbändern zu rechnen hat. Dasjenige mit der hohen Löcherbeweglichkeit hat eine Krümmung wie das Leitungsband von InSb; der Wellenzahlvektor hängt also nicht quadratisch von der Energie ab. Bevor man die große Widerstandsänderung in eigenleitendem InSb bei hohen Temperaturen durch Streumechanismen zu erklären versucht, erscheint es sinnvoller, den Einfluß des zweiten Valenzbandes mit der großen Löcherbeweglichkeit auf die Widerstandsänderung zu diskutieren.

Im folgenden soll der Einfluß des Bandes der schnellen Löcher auf die galvanomagnetischen Effekte näher untersucht werden. Dabei wird jetzt vorausgesetzt, daß die Leitfähigkeiten σ_i und die HALL-Koeffizienten R_i der Einzelbänder vom Magnetfeld nicht abhängen.

In den Formeln (3,3) soll gelten

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= e_n n \mu_n; & R_1 &= 1/(e_n n) \text{ für die Elektronen,} \\ \sigma_2 &= e_{p_1} p_1 \mu_{p_1}; & R_2 &= 1/(e_{p_1} p_1) & (3,8) \\ & & & \text{für die langsamen Löcher,} \\ \sigma_3 &= e_{p_2} p_2 \mu_{p_2}; & R_3 &= 1/(e_{p_2} p_1) \\ & & & \text{für die schnellen Löcher.} \end{aligned}$$

Richtige Vorzeichen ergeben sich in (3,3) dann, wenn die Elementarladung und die Beweglichkeit für Elektronen negativ und für Löcher positiv eingesetzt werden.

²⁸ C. HILSUM u. A. C. ROSE-INNES, Semiconducting III-V-Compounds, Pergamon Press, London 1961.

Für den relativen Widerstand folgt aus (3,1) mit $Q_0 = 1/a$:

$$Q_B/Q_0 = \frac{a(a+bB^2+cB^4)}{a^2+hB^2+lB^4}. \quad (3,9)$$

Für den Fall der Eigenleitung, der hier allein betrachtet werden soll, verschwindet der Koeffizient l .

Zur Berechnung der beiden galvanomagnetischen Effekte müssen die drei Konzentrationen und Beweglichkeiten bekannt sein. Elektronenkonzentration und Elektronenbeweglichkeit sind bei Zweibandleitung durch den HALL-Koeffizienten für verschwindendes Magnetfeld und die Leitfähigkeit ohne Magnetfeld bestimmt.

Die Experimente liefern keine Abhängigkeit des HALL-Koeffizienten vom Magnetfeld. Darum ist zu vermuten, daß auch bei Dreibandleitung die Größen des Leitungsbandes fast allein durch den HALL-Koeffizienten für kleine Magnetfelder und die Leitfähigkeit ohne Magnetfeld bestimmt werden.

Aus der folgenden Berechnung geht hervor, daß sich Elektronenkonzentration und Elektronenbeweglichkeit ebenso aus R und $R\sigma$ bestimmen lassen wie bei Zweibandleitung. Aus (3,2) folgt für $B \rightarrow 0$ für den HALL-Koeffizienten der Dreibandleitung:

$$R_{B \rightarrow 0} = \frac{-n\mu_n^2 + p_1\mu_{p_1}^2 + p_2\mu_{p_2}^2}{|e|(n\mu_n + p_1\mu_{p_1} + p_2\mu_{p_2})^2}. \quad (3,10)$$

Nun ist die Löcherbeweglichkeit etwa 100-mal kleiner als die der Elektronen, die Konzentration der langsamen Löcher p_1 ist ungefähr der Elektronenkonzentration gleich. Damit kann der zweite Summand im Zähler von (3,10) gegen den ersten vernachlässigt werden. Die Beweglichkeit der schnellen Löcher liegt in der gleichen Größenordnung wie die Elektronenbeweglichkeit. Da aber die Konzentration der schnellen Löcher nur sehr klein sein wird²⁹, kann auch das dritte Glied gegen das erste weggestrichen werden. Dieselben Überlegungen gelten für den Nenner. Es folgt für den HALL-Koeffizienten:

$$R_{B \rightarrow 0} \approx 1/(e_n n). \quad (3,11)$$

Aus den gleichen Gründen folgt näherungsweise für die Leitfähigkeit ohne Magnetfeld:

$$\sigma_0 = e_n n \mu_n. \quad (3,12)$$

Damit bestimmt sich die Elektronenbeweglichkeit zu

$$\mu_n \approx R_{B \rightarrow 0} \sigma_0. \quad (3,13)$$

Zur weiteren Berechnung der Widerstandsänderung fehlen jetzt noch die Werte für die beiden Löcherbeweglichkeiten und das Verhältnis der Löcherkonzentrationen.

Um allgemein bei hohen Temperaturen den Einfluß der schnellen Löcher auf die galvanomagnetischen Effekte von eigenleitendem InSb zu übersehen, wurden diese in Abhängigkeit von dem Verhältnis der beiden Löcherkonzentrationen für die Temperatur 714 °K und für verschiedene Werte der Beweglichkeit der schnellen Löcher berechnet. Die Beweglichkeit und die Konzentration der Elektronen ergaben sich aus (3,11) und (3,13). Für die Beweglichkeit der langsamen Löcher wurde 100 cm²/Vsec, für die magnetische Induktion 10 kGauß angenommen. Die Summe der Löcherkonzentrationen war konstant und gleich der Elektronenkonzentration. Abb. 9 zeigt den Verlauf der Widerstandsänderung, Abb. 10 den des HALL-Koeffizienten. Wie schon ver-

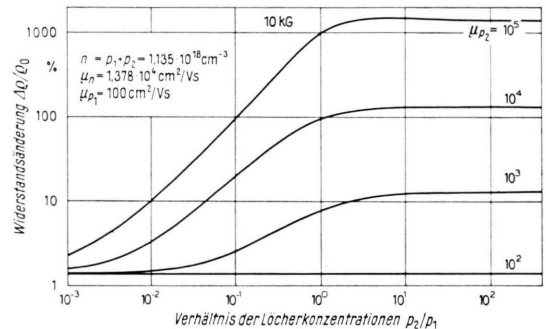


Abb. 9. Berechnete Widerstandsänderung von eigenleitendem InSb bei 714 °K für drei Energiebänder.

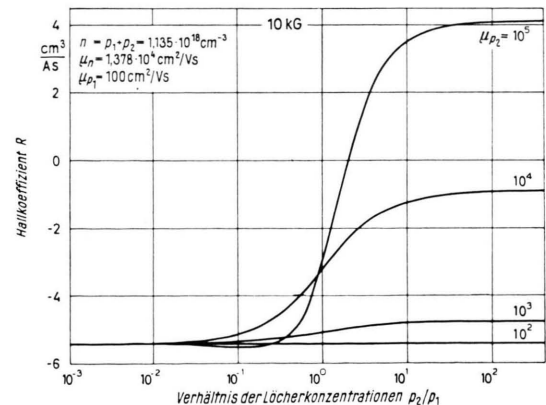


Abb. 10. Berechneter HALL-Koeffizient von eigenleitendem InSb bei 714 °K für drei Energiebänder.

²⁹ Aus der KANESCHEN Theorie ergibt sich, daß die Beweglichkeit der schnellen Löcher etwa so groß wie die Elektronenbeweglichkeit ist. Da eine große Beweglichkeit an eine

kleine Zustandsdichte im Band gebunden ist, kann man annehmen, daß der Bruchteil der schnellen Löcher sehr klein ist.

mutet, wird der HALL-Koeffizient von den schnellen Löchern fast nicht beeinflusst, wenn der Anteil der schnellen Löcher kleiner als 10% der langsamen ist. Anders verläuft die Widerstandsänderung; schon eine geringe Konzentration von schnellen Löchern kann die Widerstandsänderung merklich erhöhen. Der Einfluß der Beweglichkeit der langsamen Löcher auf die Widerstandsänderung ist schwächer. Eine Berechnung der Kurven mit $\mu_{p_2} = 150$ zeigt kaum eine Abweichung von Abb. 9.

Es ist nun naheliegend, auch den Einfluß des Magnetfeldes näher zu untersuchen. Die Abb. 11 und 12 zeigen die Abhängigkeit der Widerstandsände-

diesem Gesetz abweicht und schließlich in den Zweig der Zweibandwiderstandsänderung einmündet. Qualitativ dasselbe Bild würde sich auch ergeben, wenn die Zweibandwiderstandsänderung von einem Anteil aus einem der beiden Bänder überlagert wäre. Bekanntlich nähert sich die Widerstandsänderung des Einzelbandes mit zunehmender Induktion einem Grenzwert. Die Zweibandwiderstandsänderung in der Eigenleitung dagegen verläuft für alle Felder quadratisch. Die quadratische Abhängigkeit der Widerstandsänderung für sehr kleine magnetische Induktionen kann leicht verifiziert werden. Aus (3,9) folgt zunächst

$$\varrho_B/\varrho_0 = \frac{a(a+bB^2)}{a^2+hB^2} \quad (3,14)$$

Daraus ergibt sich für die relative Widerstandsänderung

$$\Delta\varrho/\varrho_0 = \frac{\varrho_B}{\varrho_0} - 1 = \frac{(a+b-h)B^2}{a^2+hB^2} \quad (3,15)$$

Mit kleiner werdendem B kann $h \cdot B^2$ gegen a^2 vernachlässigt werden. Es folgt

$$\Delta\varrho/\varrho_0 = \frac{a+b-h}{a^2} B^2 \quad (3,16)$$

Eine Abschätzung mit plausiblen Werten für σ_i und R_i zeigt, daß einige Summanden der Ausdrücke von (3,3) vernachlässigt werden können. Näherungsweise gilt:

$$\begin{aligned} a &= \sigma_n, \\ b &= \sigma_n^2 R_n^2 (\sigma_{p_1} + \sigma_{p_2}) + \sigma_{p_2}^2 R_{p_2}^2 \sigma_n, \\ h &= \sigma_n^2 \sigma_{p_2}^2 R_{p_2}^2. \end{aligned} \quad (3,17)$$

Mit diesen Ausdrücken folgt aus (3,16) und (3,8)

$$\Delta\varrho/\varrho_0 = \frac{\mu_n(p_1 \mu_{p_1} + p_2 \mu_{p_2})}{p_1 + p_2} B^2 \quad (3,18)$$

Für den Grenzfall verschwindender Konzentration der schnellen Löcher geht (3,18) in die Zweibandformel (3,6) über. Dasselbe gilt, wenn die Beweglichkeit der schnellen Löcher gegen die der langsamen strebt.

Der oben erwähnte schwache Einfluß der Beweglichkeit der langsamen Löcher auf die Widerstandsänderung (Abb. 9) ist nach (3,18) zu verstehen, wenn angenommen wird, daß $p_1 \mu_{p_1} \ll p_2 \mu_{p_2}$ ist. In diesem Fall würde der Einfluß von μ_{p_2} auf den Zähler nur schwach sein. Ganz allgemein kann gesagt werden, daß der Einfluß der schnellen Löcher auf die Widerstandsänderung dann merklich sein wird, wenn die Leitfähigkeit der schnellen Löcher

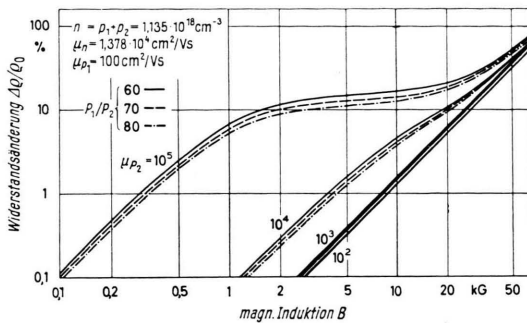


Abb. 11. Berechnete Widerstandsänderung von eigenleitendem InSb bei 714 °K für drei Energiebänder.

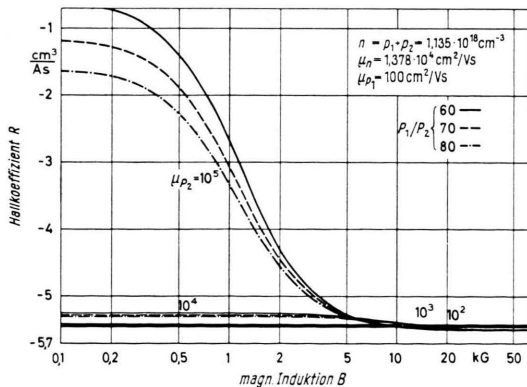


Abb. 12. Berechneter HALL-Koeffizient von eigenleitendem InSb bei 714 °K für drei Energiebänder.

von der magnetischen Induktion ebenfalls für 714 °K. Gerechnet wurde wieder mit einer Beweglichkeit der langsamen Löcher von 100 cm²/Vsec und für verschiedene Werte der Beweglichkeiten der schnellen Löcher und des Verhältnisses der Löcherkonzentrationen. Das auffallendste Ergebnis der Rechnung ist, daß die Widerstandsänderung bei kleinen Induktionen quadratisch verläuft, dann von

mit der der langsamen in gleicher Größenordnung steht.

Für sehr große Magnetfelder ergibt sich als Näherung:

$$\Delta Q/Q_0 = (a c/h) B^2. \quad (3,19)$$

Ebenso wie für a und h kann ein Näherungsausdruck für c gefunden werden:

$$c = \sigma_n^2 \sigma_{p_1} \sigma_{p_2}^2 R_n^2 R_{p_2}^2. \quad (3,20)$$

Für die Widerstandsänderung im Fall sehr großer Magnetfelder folgt damit

$$\Delta Q/Q_0 = \mu_n \mu_{p_1} (n_{p_1}/n) B^2. \quad (3,21)$$

Die Beweglichkeit der schnellen Löcher hat keinen Einfluß mehr auf die Widerstandsänderung. Das Vorhandensein der schnellen Löcher wirkt sich nur dadurch aus, daß n_{p_1}/n kleiner als 1 ist. Im Gegensatz zur Schwachfeldnäherung ist hier die Widerstandsänderung kleiner als die des entsprechenden Zweibandmodells. Ist die Konzentration der schnellen Löcher verschwindend klein, so geht auch (3,21) in (3,6) über.

Der Einfluß der schnellen Löcher auf den HALL-Koeffizienten ist nur bei kleinen Magnetfeldern merklich. Außerdem muß noch die Beweglichkeit der schnellen Löcher größer als die Elektronenbeweglichkeit sein. Mit zunehmender Induktion wird der Betrag des HALL-Koeffizienten größer. Die Änderung ist aber in dem untersuchten Bereich der magnetischen Induktion unterhalb der Meßgenauigkeit.

Ein Vergleich des Verlaufs der gerechneten Widerstandsänderung von Abb. 11 mit der gemessenen zeigt, daß beide Kurven qualitativ übereinstimmen: Die Widerstandsänderung folgt für kleine Werte der magnetischen Induktion einem quadratischen Gesetz und weicht bei höheren Werten von diesem ab.

Prinzipiell könnten alle Größen der Einzelbänder durch eine numerische Lösung der Gl. (3,1) und (3,2) bestimmt werden. Der Erfolg eines solchen Verfahrens hängt sehr stark von den Anfangswerten für σ_i und R_i ab, die für das Iterationsverfahren angenommen werden müssen. Deshalb ist es einfacher, die Widerstandsänderung mit plausiblen Werten für σ_i und R_i in Abhängigkeit von der magnetischen Induktion zu berechnen. Aus dem Verlauf der Kurve kann dann leicht abgelesen werden, wie die einzelnen Parameter die Kurvenform verändern.

Solche Berechnungen wurden für 22 °C, 174 °C, 337 °C und 492 °C durchgeführt. R_n und σ_n ergaben sich aus (3,11) und (3,12). R_{p_1} , R_{p_2} , σ_{p_1} und σ_{p_2} wurden so lange variiert, bis die Übereinstimmung der gerechneten Kurven mit den Meßwerten befriedigend war. Es kann leicht eingesehen werden, daß dieses Lösungsverfahren eindeutig ist. Die besten Ergebnisse dieses Verfahrens sind in Abb. 6 eingetragen. Die berechnete Widerstandsänderung wird durch die ausgezogenen Kurven wiedergegeben, die Kreuze sind die gemessenen Werte. Die Übereinstimmung ist ausgezeichnet. In Tab. 3 sind die für die Berechnung dieser Kurven verwendeten

°C	$K = p_1/p_2$	μ_{p_1}	μ_{p_2}	μ_n	n
22	90	650	$3 \cdot 10^4$	$7,56 \cdot 10^4$	$1,73 \cdot 10^{16}$
174	80	300	$1,7 \cdot 10^4$	$4,1 \cdot 10^4$	$1,56 \cdot 10^{17}$
337	60	160	$1,25 \cdot 10^4$	$2,4 \cdot 10^4$	$5,8 \cdot 10^{17}$
492	33	100	$9,5 \cdot 10^3$	$1,3 \cdot 10^4$	$1,25 \cdot 10^{18}$

Tab. 3. Beweglichkeiten und Konzentrationen von eigenleitendem InSb bei hohen Temperaturen.

Parameter wiedergegeben. Die Beweglichkeiten sind zur besseren Übersicht in Abb. 8 eingetragen. Als Ergebnis kann festgehalten werden: Die Beweglichkeit der schnellen Löcher ist nur wenig kleiner als die Elektronenbeweglichkeit und fällt etwas schwächer mit wachsender Temperatur als diese. Aus Tab. 3 ergibt sich ferner: Der Anteil der schnellen Löcher beträgt bei Zimmertemperatur 1,1%, und steigt bis zu 3% der Gesamtlöcherkonzentration bei 492 °C. Auch dieses Ergebnis ist verständlich. Nach KANE¹¹ weicht das Band der schnellen Löcher ebenso vom parabolischen Verlauf ab wie das Leitungsband, das Band der langsamen Löcher dagegen nicht. Mit zunehmender Energie wird die Zustandsdichte der schnellen Löcher größer, die der langsamen bleibt gleich. Da mit zunehmender Temperatur das Band mehr aufgefüllt wird, wächst die Dichte der schnellen Löcher verhältnismäßig stärker als die der langsamen. Die relativ große Widerstandsänderung von eigenleitendem InSb bei hohen Temperaturen läßt sich also durch das bereits bewährte KANESche Modell mit zwei Sorten von Löchern zwanglos erklären.

IV. Die galvanomagnetischen Effekte von p-InSb bei 77 °K unter dem Einfluß von gerichtetem Druck und Zug

Zuerst wurde festgestellt, wie sich die galvanomagnetischen Effekte unter dem Einfluß von Ver-

spannungen bei Zimmertemperatur ändern. Solche Messungen gibt es bis jetzt nur für hydrostatischen Druck. Sie ergeben eine Vergrößerung der verbotenen Zone und eine Abnahme der Elektronenbeweglichkeit. Dagegen wird die Löcherbeweglichkeit nicht beeinflusst.

Die ersten Messungen unter einseitigem Druck bis zu 142 kp/cm² wurden an einer in der [111]-Richtung orientierten eigenleitenden Probe bei 20 °C durchgeführt. Strom- und Druckrichtung waren identisch. Es ergab sich eine Zunahme des HALL-Koeffizienten von 1,3% und eine Abnahme der Leitfähigkeit von 1,6%. Der Einfluß des Drucks auf die Widerstandsänderung blieb im Magnetfeld unterhalb der Meßgenauigkeit. Dieses ist nach Formel (3,6) zu erwarten, da allgemein angenommen wird, daß der Einfluß von Druck auf die Veränderung der verbotenen Zone stärker ist als auf die Beweglichkeiten. Die Veränderung der Leitfähigkeit ist im Einklang mit Messungen unter einseitigen Zug. BURNS und FLEISCHER³⁰ finden für die Widerstandsänderung pro Druckeinheit von eigenleitendem InSb bei Zimmertemperatur:

$$\frac{1}{P} \frac{\Delta \rho}{\rho_0} = -8,25 \cdot 10^{-5} \text{ cm}^2/\text{kp}.$$

Die Umrechnung der Leitfähigkeitsabnahme von 1,3% bei einem Druck von 142 kp/cm² ergibt dagegen

$$\frac{1}{P} \frac{\Delta \rho}{\rho_0} = +9,16 \cdot 10^{-5} \text{ cm}^2/\text{kp}.$$

Das andere Vorzeichen ist kein Widerspruch, da BURNS und FLEISCHER nicht Druck, sondern Zug auf die Probe einwirken ließen. Der Piezowiderstand hängt sehr stark von der Temperatur und auch der Orientierung der Probe ab; der Unterschied in den Absolutbeträgen beider Messungen kann mit solchen Abweichungen zusammenhängen.

Ein Vergleich der Messung des HALL-Koeffizienten mit solchen anderer Autoren kann nicht durchgeführt werden, da dieser nur unter dem Einfluß von hydrostatischem Druck gemessen wurde. LONG³¹ findet für die Änderung des HALL-Koeffizienten pro Druckeinheit:

$$\frac{1}{P} \frac{\Delta R}{R_0} = 3,75 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^2/\text{kp}.$$

Die relative Änderung des HALL-Koeffizienten unter einseitigem Druck für die [111]-Richtung beträgt aber

$$\frac{1}{P} \frac{\Delta R}{R_0} = 1,12 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^2/\text{kp}.$$

Der Effekt ist kleiner als bei allseitigem Druck. Dasselbe gilt auch für die Widerstandsänderung. Aus der Meßkurve von LONG ergibt sich:

$$\frac{1}{P} \frac{\Delta \rho}{\rho_0} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^2/\text{kp}.$$

Neben Messungen von LONG liegen solche auch von anderen Autoren vor. Die Ergebnisse stimmen weitgehend überein.

Mit zunehmender Temperatur wurde die Druckabhängigkeit der galvanomagnetischen Effekte kleiner und lagen bei 150 °C schon unterhalb der Meßgenauigkeit; sie wurden deshalb nicht weiter verfolgt.

Die Verkleinerung ist verständlich, wenn angenommen wird, daß die Vergrößerung der verbotenen Zone bei bestimmtem Druck in erster Näherung unabhängig von der Temperatur ist. Für die Änderung der Breite der verbotenen Zone gilt:

$$\frac{R_{\text{Druck}}}{R_0} = \exp \left(\frac{\Delta E_{\text{Druck}} - \Delta E_0}{kT} \right). \quad (4.1)$$

Mit zunehmender Temperatur strebt dann R_{Druck}/R_0 gegen 1.

Bei 77 °K dagegen befinden sich auch die reinsten Proben in der Störleitung. Die Messung der galvanomagnetischen Effekte unter dem Einfluß von einseitigem Druck- und Zug an p-leitenden Proben geben dann Aussagen über die Druckabhängigkeit von Valenz- oder Leitungsband allein.

Solche Messungen wurden unter einseitigem Druck bis zu 320 kp/cm² an einer mit $2,6 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$ Störstellen dotierten Probe des Kristalls K 252 durchgeführt. Abb. 13 zeigt den Verlauf der Leitfähigkeit ohne Magnetfeld als Funktion des Drucks in Längsrichtung der Probe. Die Leitfähigkeit nimmt mit wachsendem Druck proportional zu diesem zu. Der lineare Zusammenhang zwischen Druck und Leitfähigkeit läßt vermuten, daß bei einseitigem Zug die Leitfähigkeit kleiner wird. Dieses bestätigt die in Abb. 14 eingetragene Meßkurve einer Zugmessung. Die Probe war mit $7 \cdot 10^{15}$ Störstellen pro cm³ dotiert.

³⁰ F. P. BURNS u. A. A. FLEISCHER, Phys. Rev. **107**, 1281 [1957].

³¹ D. LONG, Phys. Rev. **99**, 388 [1959].

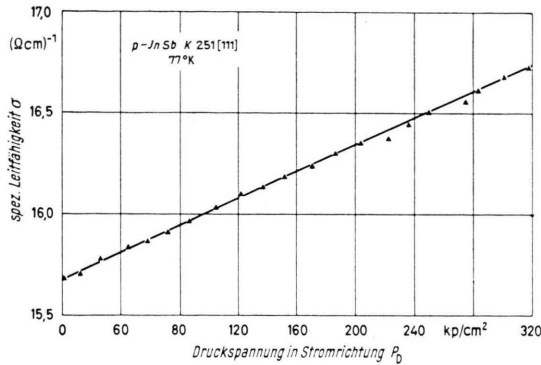


Abb. 13. Spezifische elektrische Leitfähigkeit des p-dotierten InSb-Einkristalls K 252 mit $N_A - N_D = 2,6 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$ in Abhängigkeit von einseitigem Druck.

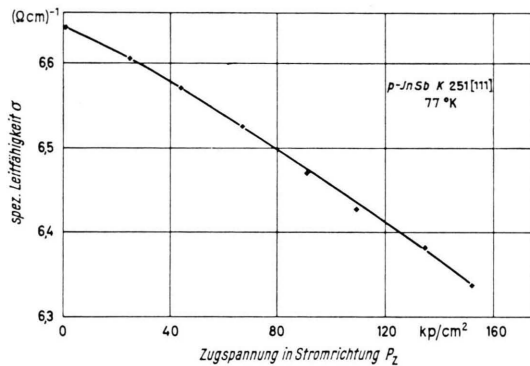


Abb. 14. Spezifische elektrische Leitfähigkeit des p-dotierten InSb-Einkristalls K 251 mit $N_A - N_D = 7 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}$ in Abhängigkeit von einseitigem Zug.

Aus dem Anstieg der beiden Kurven kann die Widerstandsänderung pro Druckeinheit bestimmt werden. Es wird

$$\frac{1}{P} \Delta \sigma / \sigma_0 \text{ Druck} = -1,62 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^2 / \text{kp},$$

$$\frac{1}{P} \Delta \sigma / \sigma_0 \text{ Zug} = 3,2 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^2 / \text{kp}.$$

Diese Messungen können mit solchen von anderen Autoren verglichen werden. Wenn Strom und Spannung in die [111]-Richtung fallen, ergibt sich für die Widerstandsänderung pro Druckeinheit:

$$\frac{1}{P} \Delta \sigma / \sigma_0 = \frac{1}{3} (\pi_{11} + 2 \pi_{12} + 2 \pi_{44}).$$

In Tab. 4 sind einige vollständige Sätze von Piezowiderstandskoeffizienten für p-InSb bei 77 °K eingetragen. Diese sind Arbeiten von TUZZOLINO³² und POTTER³³ entnommen. Die Übereinstimmung ist gut, wenn berücksichtigt wird, daß auch die Messungen von TUZZOLINO und POTTER bei vergleichbarer Dotierung etwas voneinander abweichen.

Die Meßpunkte von Abb. 15 zeigen den Verlauf des HALL-Koeffizienten des Kristalls K 252. Die Beeinflussung des HALL-Koeffizienten durch einseitigen Druck ist so gering, daß sie unterhalb der Meßgenauigkeit liegt. Dasselbe gilt für den Einfluß von einseitigem Zug (Abb. 16). Die Meßpunkte der Abb. 17 und 18 zeigen den Verlauf der Leitfähigkeit von der magnetischen Induktion. Diese Probe

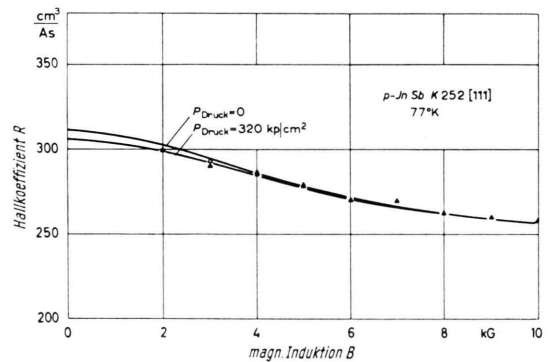


Abb. 15. HALL-Koeffizient in Abhängigkeit von der magnetischen Induktion und unter dem Einfluß von einseitigem Druck. Die Kurve wurde mit dem einfachen Zweibandmodell berechnet, die Dreiecke sind Meßpunkte.

	$N_A - N_D$ [cm ⁻³]	Koeffizient · 10 ⁴ [cm ² /kp]			
		π_{11}	π_{44}	π_{44}	$\pi_{11} + 2 \pi_{12} + 2 \pi_{44}/3$
POTTER (1957)	$1,02 \cdot 10^{15}$	0,86	— 0,42	3,23	2,16
TUZZOLINO (1958)	$0,82 \cdot 10^{15}$	—	—	—	—
	$30 \cdot 10^{15}$	0,96	— 0,46	4,24	2,84
	$6,3 \cdot 10^{16}$	0,93	— 0,44	3,65	2,45
K 252 (Druck)	$6,6 \cdot 10^{17}$	0,41	— 0,18	2,41	1,62
	$2,6 \cdot 10^{16}$	—	—	—	— 1,88
	$7 \cdot 10^{15}$	—	—	—	3,2

Tab. 4. Piezowiderstandskoeffizienten von p-dotiertem InSb bei 77 °K.

³² A. J. TUZZOLINO, Phys. Rev. **109**, 1980 [1958].

³³ R. F. POTTER, Phys. Rev. **108**, 652 [1957].

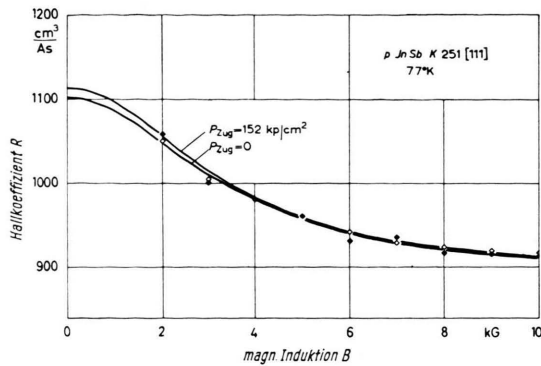


Abb. 16. HALL-Koeffizient in Abhängigkeit von der magnetischen Induktion und unter dem Einfluß von einseitigem Zug. Die Kurve wurde mit dem einfachen Zweibandmodell berechnet, die Vierecke sind Meßpunkte.

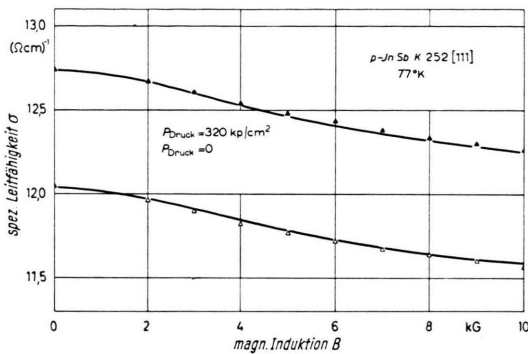


Abb. 17. Elektrische Leitfähigkeit von der magnetischen Induktion und unter Einwirkung von Druckspannung. Die Kurve wurde mit dem einfachen Zweibandmodell berechnet, die Dreiecke sind Meßpunkte.

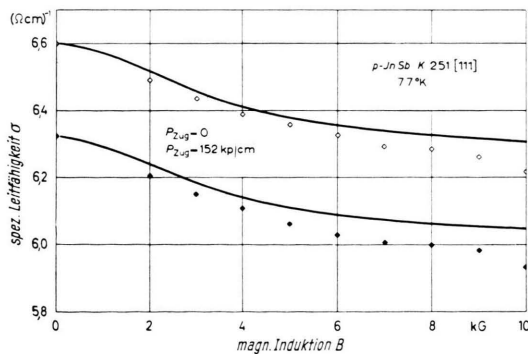


Abb. 18. Elektrische Leitfähigkeit in Abhängigkeit von der magnetischen Induktion und unter der Einwirkung von Zugspannung. Die Kurve wurde mit dem einfachen Zweibandmodell berechnet, die Vierecke sind Meßpunkte.

des Kristalls K 252 ist etwas reiner als die von Abb. 15; daraus erklärt sich die kleinere Leitfähigkeit. In Abb. 19 ist die Widerstandsänderung der

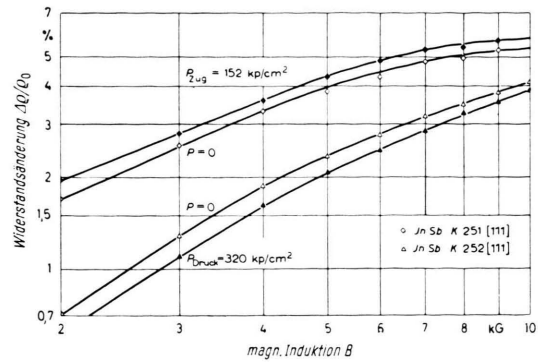


Abb. 19. Widerstandsänderung der p-dotierten Proben InSb K 252 ($N_A - N_D = 2,6 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$) und InSb K 251 ($N_A - N_D = 7 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}$) bei 77 °K für einseitige Druck- und Zugspannungen.

beiden p-dotierten Proben aufgetragen. Wie zu erwarten war, ist die Widerstandsänderung im Magnetfeld für die reinere Probe K 251 größer. Wirkt ein Zug auf die Probe, so erhöht sich die Widerstandsänderung. Die Kurve der Probe K 252 zeigt dagegen, daß die Widerstandsänderung unter dem Einfluß von Druck kleiner wird. Die Widerstandsänderung hängt nur bis etwa 4 kGauß vom Quadrat der magnetischen Induktion ab. Da sich sowohl die Widerstandsänderung als auch die Leitfähigkeit bei Einwirkung von Druck entgegengesetzt verhalten als bei Zug, hängen beide Effekte linear von P ab.

Eine Deutung dieser Ergebnisse unter der Annahme, daß nur ein Valenzband zur Leitfähigkeit beiträgt, ist weitgehend ausgeschlossen. Da durch Druck die Leitfähigkeit erhöht wird, müssen folglich Beweglichkeit oder Löcherkonzentration größer werden. Letzteres ist aber ausgeschlossen, denn der HALL-Koeffizient wird durch Druck kaum verändert. Wird nun außerdem noch ein Magnetfeld eingeschaltet, so verringert sich die Leitfähigkeit wieder. Jedoch ist die relative Widerstandsänderung kleiner als ohne Einwirkung von Druck. Nun nimmt aber die Widerstandsänderung im allgemeinen mit wachsender Beweglichkeit zu. Bei Halbleitern beruht sie darauf, daß nicht alle Ladungsträger die gleiche Geschwindigkeit haben; bei stark entarteten Substanzen, z. B. Metallen, wird sie durch Anisotropie erzeugt. Die Widerstandsänderung ist allgemein dann um so größer, je stärker die Anisotropie ausgeprägt ist. Eine solche Möglichkeit ist jedoch hier ausgeschlossen. InSb ist im spannungsfreien Zustand isotrop, und durch Einwirkung einer Zugspannung könnte höchstens eine Anisotropie erzeugt, aber

nicht aufgehoben werden. Auch dieser Mechanismus führt zu einer größeren Widerstandsänderung. Entsprechende Betrachtungen können für den Zugversuch angestellt werden.

Wird dagegen angenommen, daß zwei Valenzbänder zur Leitfähigkeit beitragen, so kann durch Einwirkung von Zug oder Druck eine Verschiebung der beiden Teilbänder gegeneinander und auch eine Veränderung der Bandform, also der Beweglichkeit, bewirkt werden. Außerdem könnte der Abstand der Störstellenniveaus von der Valenzbandkante verändert werden. Da sich der HALL-Koeffizient nicht verändert, kann dieses jedoch ausgeschlossen werden. Am einfachsten ist es, die Versuche mit einer Verschiebung der Valenzbänder gegeneinander zu erklären. Da die Summe der Löcherkonzentrationen unter Einwirkung von Druck konstant bleiben muß, kann eine Erhöhung der Leitfähigkeit nur erreicht werden, wenn die Teilbänder im Sinne von Abb. 20 verschoben werden. Es bleibt nur zu untersuchen, ob unter diesen Umständen die Widerstandsänderung verkleinert wird.

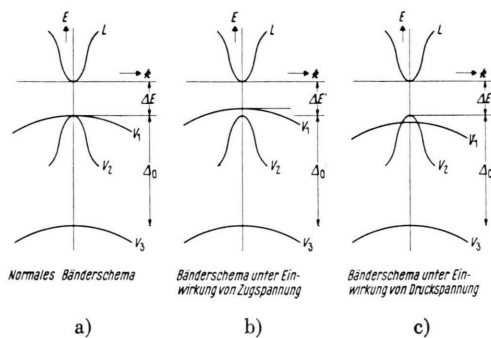


Abb. 20. Bänderschema von InSb.

Eine Verschiebung der Valenzbänder im Sinne von Abb. 20 c) hat zur Folge, daß das Verhältnis p_2/p_1 größer wird. Der Anteil der schnellen Löcher beträgt ohne Spannung etwa 1%. Damit die Widerstandsänderung mit zunehmendem Druck kleiner wird, müßte bei einem Beweglichkeitsverhältnis für $b = \mu_{p_1}/\mu_{p_2} = 10^{-2}$ das Produkt $(R_{p_2} \cdot \sigma_{p_2} B)^2 < 1$ sein (Abb. 29). Setzt man für die Induktion 10^{-4} Vsec/cm² ein, so folgt $R_{p_2} \sigma_{p_2} < 10^4$. In Wirklichkeit ist aber R_{p_2} , σ_{p_2} und ebenso b sicher größer, wie sich aus dem KANESchen Modell abschätzen läßt. Daraus folgt dann, daß eine Verschiebung der Bänder, wie oben angenommen, stets zu einer Vergrößerung der Widerstandsänderung führt [vgl. Formel (3,4) und (3,5)].

Da die Messungen unter der Annahme einer reinen Bandverschiebung nicht gedeutet werden können, muß auch eine Veränderung der Bandform zugelassen werden. Unter dem Einfluß der mechanischen Spannung verändern sich die Ladungsträgerdichten und die Beweglichkeiten der Teilbänder. Die Bestimmung dieser Größen ist möglich, wenn man die Gl. (3,4) und (3,5) für den HALL-Koeffizienten und den Widerstand in beliebigem Magnetfeld auswertet. Dazu gibt es verschiedene Möglichkeiten. CHAMPNESS¹⁵ hat zur Bestimmung der vier Größen Näherungsgleichungen für den HALL-Koeffizienten und die Widerstandsänderung für das Magnetfeld B sowie die Gleichungen für die Leitfähigkeit und den HALL-Koeffizienten für sehr kleine Magnetfelder benutzt. Bei diesem Verfahren muß man voraussetzen, daß die Größen der Teilbänder, also die HALL-Koeffizienten und die Leitfähigkeiten, nicht von der Induktion abhängen. Außerdem ist die genaue Bestimmung des HALL-Koeffizienten für $B \rightarrow 0$ schwierig durchzuführen. Zur exakten Bestimmung von $\sigma_{p_1}(B)$, $\sigma_{p_2}(B)$, $R_{p_1}(B)$ und $R_{p_2}(B)$ müßten die vollständigen Zweibandformeln mit Streumechanismus verwendet werden. Da die Abhängigkeit der Stoßzeit von der Energie nicht bekannt ist, wird es am einfachsten sein, ebenso wie bei der Bestimmung der Beweglichkeit bei hohen Temperaturen, die Widerstandsänderung und den HALL-Koeffizienten als Funktion der magnetischen Induktion zu berechnen. Durch Variation von σ_{p_1} , σ_{p_2} , R_{p_1} und R_{p_2} können dann die gerechneten Kurven den gemessenen angepaßt werden. Der Unterschied gegenüber der Methode bei hohen Temperaturen besteht darin, daß hier sowohl die Meßpunkte des HALL-Koeffizienten als auch die der Leitfähigkeit mit gleichem σ_i und R_i angepaßt werden müssen.

In den Abb. 15 und 17 sind diejenigen Kurven eingetragen, die mit den Meßwerten am besten zusammenpassen. Für die Probe K 252 (Abb. 15 und 17) ist die Anpassung im Rahmen der Meßgenauigkeit vollständig. Unabhängig davon, ob auf die Probe ein Druck ausgeübt wird oder nicht, können die Meßwerte durch σ_i und R_i wiedergegeben werden, die nicht von B abhängen. Damit ist gezeigt, daß der Verlauf der Leitfähigkeit und des HALL-Koeffizienten in diesem Fall nur von dem Zusammenwirken der zwei Teilbänder des Valenzbandes bestimmt wird. Eine Widerstandsänderung in den Einzelbändern kann vernachlässigt werden.

	Druckversuch		Zugversuch	
	$p = 0$	$p = 320 \text{ kp/cm}^2$	$p = 0$	$p = 152 \text{ kp/cm}^2$
σ_{p_1}	11,25	11,85	6,1	5,875
σ_{p_2}	0,8	0,89	0,5	0,445
R_{p_1}	240	240	900	900
R_{p_2}	$2,2 \cdot 10^4$	$2 \cdot 10^4$	$5,8 \cdot 10^4$	$6,8 \cdot 10^4$
$\sigma_{p_1} R_{p_1} = \mu_{p_1}$	$2,7 \cdot 10^3$	$2,84 \cdot 10^3$	$5,5 \cdot 10^3$	$5,3 \cdot 10^3$
$\sigma_{p_2} R_{p_2} = \mu_{p_2}$	$1,76 \cdot 10^4$	$1,78 \cdot 10^4$	$2,9 \cdot 10^4$	$3,02 \cdot 10^4$
$1/e R_{p_1} = p_1$	$2,6 \cdot 10^{16}$	$2,6 \cdot 10^{16}$	$6,95 \cdot 10^{15}$	$6,95 \cdot 10^{15}$
$1/e R_{p_2} = p_2$	$2,84 \cdot 10^{14}$	$3,12 \cdot 10^{14}$	$1,08 \cdot 10^{14}$	$9,2 \cdot 10^{13}$
μ_{p_1}/μ_{p_2}	$1,53 \cdot 10^{-1}$	$1,60 \cdot 10^{-1}$	$1,90 \cdot 10^{-1}$	$1,75 \cdot 10^{-1}$
p_1/p_2	91,5	83,5	64,4	75,5

Tab. 5. Ergebnisse der Druck- und Zugmessungen.

Wie die Abb. 17 und 18 zeigen, ist die Anpassung für die Probe K 251 nicht so gut herzustellen. Wird diese so durchgeführt, daß der HALL-Koeffizient zufriedenstellend wiedergegeben wird, so weicht die berechnete Kurve für die Leitfähigkeit mit zunehmender Induktion immer mehr von den Meßpunkten ab. Da die berechnete Kurve oberhalb der Meßpunkte liegt, könnte die Kurve besser angepaßt werden, wenn σ_{p_1} mit zunehmendem B kleiner würde. Unter der Einwirkung von Zug ergibt sich der gleiche Sachverhalt. Dieses Resultat weist darauf hin, daß sich mit zunehmender Reinheit eine Widerstandsänderung aus einem der Teilbänder bemerkbar macht, denn der Störstellengehalt der Probe K 251 ist kleiner als der der Probe K 252. Da die Widerstandsänderung mit zunehmender Beweglichkeit stark größer wird, ist dieses Verhalten auch verständlich. Zur Klärung dieser Frage sind noch genauere Messungen vor allem an schwächer dotierten Proben nötig.

In Tab. 5 sind die für die Berechnung der Kurven in den Abb. 15 bis 18 benutzten Werte für die σ_i und R_i eingetragen. Da diese unabhängig von B sind, können die Löcherkonzentrationen und Löcherbeweglichkeiten der Teilbänder leicht berechnet werden. Auch diese Werte sind in Tab. 5 eingetragen. Sie zeigen, wie sich die Teilbänder unter dem Einfluß von einseitigem Zug oder Druck verändern. Die Beweglichkeit der langsamen Löcher wird durch Druck um 5,2% vergrößert, durch Zug um 3,6% verkleinert. Die Beweglichkeit der schnellen Löcher wird wahrscheinlich nicht geändert. Die Bestimmung dieser Größe hängt sehr stark von R ab; eine relativ schwache Änderung dieser Größe ändert die Werte des HALL-Koeffizienten für $B \rightarrow 0$ sehr stark. Für kleine Magnetfelder ist jedoch die Bestimmung

des HALL-Koeffizienten mit einer relativ hohen Unsicherheit behaftet.

Die Änderung der Konzentration der langsamen Löcher unter dem Einfluß von Zug oder Druck bleibt unterhalb der Meßgenauigkeit. Dagegen ändert sich die Konzentration der schnellen Löcher: Unter Anwendung von Druck wird sie um 10% größer, unter Anwendung von Zug wird sie sogar um 15% kleiner. In beiden Fällen sind die Effekte außerhalb der Meßgenauigkeit. Beim Vergleich beider Messungen ist noch zu berücksichtigen, daß die Zugspannung nur halb so groß wie die Druckspannung war. Die Zugeffekte sind zum Vergleich noch mit dem Faktor 2 zu multiplizieren.

Die Änderung der Konzentration der schnellen Löcher unter Einwirkung von Zug bedeutet, daß sich die Bänder im Sinne von Abb. 20 c verschieben.

Es wäre nun möglich, den Abstand zwischen den Bändern V_1 und V_2 als Funktion des Druckes zu berechnen. Da die Meßgenauigkeit sich jedoch noch verbessern läßt, soll dieses erst geschehen, wenn weitere Messungen vorliegen.

Auf einen Punkt ist noch hinzuweisen: Nach dem KANESchen Modell müßte dieses Verhältnis mit zunehmender Dotierung kleiner werden, da wegen der Abweichung des Bandes V_2 der schnellen Löcher vom parabolischen Verlauf diese schneller zunehmen als die langsamen. Wie gezeigt wurde (Tab. 3) wird diese Forderung bei hohen Temperaturen auch bestätigt. Die letzte Zeile in Tab. 5 zeigt, daß diese Forderung bei 77 °K nicht erfüllt ist. Dieses Verhalten zeigen auch die Rechnungen von CHAMPNESS¹⁵. Die von CHAMPNESS unter vereinfachten Annahmen bestimmten Konzentrationen und Beweglichkeiten von p-InSb im spannungsfreien Zustand bei 77 °K sind auch im übrigen mit den Ergebnissen von Tab. 5 in guter Übereinstimmung.

Anhang 1

Zur Ableitung der Mehrbandformeln nach Chambers

Zur Ableitung der Mehr-Band-Formeln von CHAMBERS geht man am besten von einer Betrachtung der auf die Ladungsträger wirkenden Kräfte aus. Es wirkt das elektrische Feld, die LORENTZ-Kraft und eine der Geschwindigkeit der Ladungsträger proportionale Reibungskraft. Die Bewegungsgleichung lautet dann für die Ladungsträger des Bandes i :

$$m_i \dot{v}_i = e (\mathcal{E} + v_i \times \mathfrak{B}) - \xi_i v_i = 0 \quad (\text{A 1.1})$$

mit $\xi_i = m_i / \tau_i = e / \mu_i$. (A 1.2)

Aus (A 1.1) ergibt sich für die x - und y -Komponente n_i von v_i , wenn das Magnetfeld in z -Richtung zeigt,

$$v_{x_i} = \frac{\mu_i E_x}{1 + (\mu_i B)^2} + \frac{\mu_i^2 B E_y}{1 + (\mu_i B)^2}, \quad (\text{A 1.3})$$

$$v_{y_i} = -\frac{\mu_i^2 B E_x}{1 + (\mu_i B)^2} + \frac{\mu_i E_y}{1 + (\mu_i B)^2}. \quad (\text{A 1.4})$$

Damit ergibt sich für den Strom mit

$$j_i = e n_i v_i, \quad (\text{A 1.5})$$

$$j_{x_i} = \frac{\sigma_i E_x}{1 + (R_i \sigma_i B)^2} + \frac{\sigma_i^2 R_i B E_y}{1 + (\sigma_i R_i B)^2}, \quad (\text{A 1.6})$$

$$j_{y_i} = -\frac{\sigma_i^2 R_i B E_x}{1 + (\sigma_i R_i B)^2} + \frac{\sigma_i E_y}{1 + (\sigma_i R_i B)^2}. \quad (\text{A 1.7})$$

Setzt sich der Gesamtstrom aus den Strömen der n Teilbänder zusammen, so werden die x -Komponenten addiert, während der Gesamtstrom in y -Richtung verschwinden muß. Mit den Ausdrücken für die Leitfähigkeit oder den spezifischen Widerstand

$$\sigma = 1/\varrho = j_x/E_x \quad (\text{A 1.8})$$

und die HALL-Konstante

$$R = (E_y/E_x) \cdot (1/\sigma B) \quad (\text{A 1.9})$$

ergibt sich für den Gesamtstrom, wenn für $(\sigma_i R_i B)^2 = j_i$ gesetzt wird,

$$\varrho(B) = \frac{\sum_i \sigma_i / (1 + j_i)}{[\sum_i \sigma_i / (1 + j_i)]^2 + [\sum_i \sigma_i^2 R_i B / (1 + j_i)]^2}, \quad (\text{A 1.10})$$

$$R(B) = \frac{\sum_i \sigma_i^2 R_i / (1 + j_i)}{[\sum_i \sigma_i / (1 + j_i)]^2 + [\sum_i \sigma_i^2 R_i B / (1 + j_i)]^2} \quad (\text{A 1.11})$$

oder nach einigen Umformungen

$$\varrho(B) = \frac{\sum_i \sigma_i \prod_k^{k \neq i} (1 + j_k)}{\sum_i \sigma_i^2 \prod_k^{k \neq i} (1 + j_k) + 2 \sum_{i,l} \sigma_i \sigma_l (1 + \sigma_i \sigma_l R_i R_l B) \prod_k^{k \neq i,l} (1 + j_k)}, \quad (\text{A 1.12})$$

$$R(B) = \frac{\sum_i \sigma_i^2 R_i \prod_k^{k \neq i} (1 + j_k)}{\sum_i \sigma_i^2 \prod_k^{k \neq i} (1 + j_k) + 2 \sum_{i,l} \sigma_i \sigma_l (1 + \sigma_i \sigma_l R_i R_l B) \prod_k^{k \neq i,l} (1 + j_k)}. \quad (\text{A 1.13})$$

Diese Gleichungen sind auch dann gültig, wenn die σ_i und R_i von der magnetischen Induktion B abhängen. Es sind dann die dem Feld entsprechenden Werte einzusetzen.

Weiß man, daß eine Abhängigkeit der σ_i und der R_i von der magnetischen Induktion nicht auftritt, so kann für

$$\sigma = e_i n_i \mu_i \quad (\text{A 1.14})$$

und für

$$R_i = 1/(e n_i) \quad (\text{A 1.15})$$

gesetzt werden. Die oben angegebenen Formeln werden dann mit den von FISCHER¹⁶ angegebenen identisch.

Anhang 2

Diskussion der Zweibandformeln

1. Widerstandsänderung für Elektronen-Löcher

Aus der Formel (3.4) für die Leitfähigkeit eines Zweibandleiters im Magnetfeld folgt für die Wider-

standsänderung im Magnetfeld

$$\frac{\Delta \varrho}{\varrho_0} = \frac{\varrho_B}{\varrho_0} - 1 = \frac{1 + (\mu_p B)^2 [(1 + R_n b/R_p)/(1 + R_n/R_p b)]}{1 + (\mu_p B)^2 [(1 + R_n/R_p)^2/(1 + R_n/R_p b)^2]} - 1. \quad (\text{A 2.1})$$

Die Widerstandsänderung wurde in Abhängigkeit von $\mu_p B$ für verschiedene Werte von R_n/R_p berechnet. In Abb. 21 sind die gerechneten Kurven eingetragen. Bei gegebenem Beweglichkeitsverhältnis hängt die Widerstandsänderung nur vom Verhältnis der Elektronen- und Löcherkonzentration ab. Bei kleinen Werten der magnetischen Induktion verläuft $\Delta \varrho/\varrho_0$ quadratisch mit dieser und strebt mit zunehmender Induktion einem Grenzwert zu. Dieser hängt, unabhängig ob es sich um Donatoren oder Akzeptoren handelt, nur von der Störstellenkonzentration ab.

Für eigenleitendes InSb gibt es keinen Grenzwert. Abb. 22 zeigt Verlauf der Widerstandsänderung als Funktion des Verhältnisses der HALL-Koeffizienten. Größere Werte von R_n/R_p bedeuten n -dotiertes, kleinere p -dotiertes InSb. Bei kleinen Werten von B hat

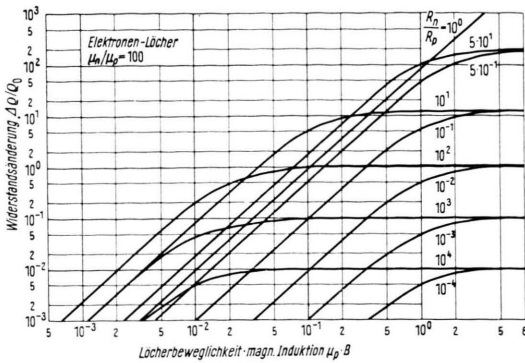


Abb. 21. Berechnete Widerstandsänderung für n- und p-dotiertes InSb in Abhängigkeit von der magnetischen Induktion.

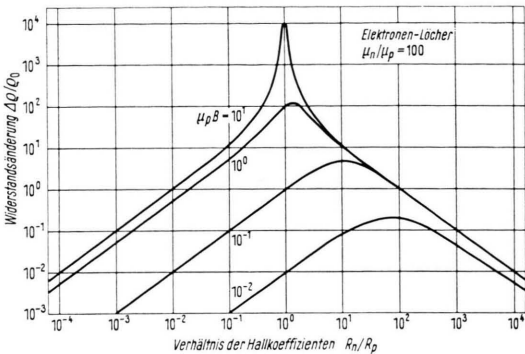


Abb. 22. Berechnete Widerstandsänderung für n- und p-dotiertes InSb in Abhängigkeit von der Dotierung.

p-dotiertes InSb die größte Widerstandsänderung; bei sehr großen Induktionen dagegen liegt das Maximum in der Eigenleitung, wobei Eigenleitung bedeutet, daß $|R_n| = |R_p|$ ist.

2. HALL-Koeffizient für Elektronen-Löcher

Für den HALL-Koeffizienten ergibt sich aus (3,5)

$$\sigma_n = \frac{\mu_n}{R_2}; \quad \sigma_p = \frac{\mu_p}{R_p}; \quad \mu_n = b \mu_p,$$

$$R = R_n \frac{(1 + R_n/R_p b)^2 + (\mu_p B)^2 (1 + R_n/R_p)}{(1 + R_n/R_p b)^2 + (\mu_p B)^2 (1 + R_n/R_p)^2}.$$

Da R_n negativ ist, folgt, daß auch μ_n und b negative Größen sind. $\mu_p B$ ist wieder unabhängige Variable.

Es gelten folgende Beziehungen:

$$R_n = \frac{1}{en} = \frac{-6,25 \cdot 10^{18}}{n};$$

$$R_p = \frac{1}{ep} = \frac{6,25 \cdot 10^{18}}{p}; \quad N_S = N_D = N_A,$$

$$n = \frac{1}{2} N_S + \frac{1}{2} \sqrt{N_S^2 + 4 n_i^2}$$

$$n = -\frac{1}{2} N_S + \frac{1}{2} \sqrt{N_S^2 + 4 n_i^2}$$

Für n_i wurde der Wert $2 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$ angenommen. Das entspricht etwa dem Wert von InSb bei Zimmertemperatur. Abb. 23 zeigt den Verlauf des HALL-Koeffizienten von p-dotiertem InSb. (Abb. 22–30 siehe S. 1296.)

Wegen der relativ hohen Beweglichkeit der Elektronen ist der HALL-Koeffizient bei Zimmertemperatur negativ. Mit zunehmendem Magnetfeld wird der Betrag von R kleiner, geht durch Null und nähert sich dann einem Grenzwert. Abb. 24 zeigt den HALL-Koeffizienten für n-dotiertes InSb. Der Einfluß des Magnetfeldes ist geringer als bei p-Dotierung. Im Bereich der leicht zugänglichen Felder ist R unabhängig von B . Im Gegensatz zu p-dotiertem Material wird der Betrag von R mit zunehmender Induktion größer.

3. Widerstandsänderung und HALL-Koeffizient für Löcher-Löcher

Zur Berechnung wurde wieder von den Formeln (3,4) und (3,5) ausgegangen. Im Zusammenhang mit den Deutungen der Zug- und Druckmessungen entstand die Frage, wie sich Widerstandsänderung und HALL-Koeffizient bei Veränderung des Konzentrationsverhältnisses ändern würden. Deshalb wurde als Abszisse das Verhältnis der beiden Löcherkonzentrationen aufgetragen. Die Abb. 25, 27 und 29 zeigen den Verlauf der Widerstandsänderung. Das Verhältnis der HALL-Beweglichkeit μ_{p1}/μ_{p2} beträgt 10^{-2} , $5 \cdot 10^{-2}$ und 10^{-1} . Berechnet wurde die Widerstandsänderung für verschiedene Werte der Größe $\mu_{p2} B$. Die Abb. 26, 28 und 30 zeigen den Verlauf des HALL-Koeffizienten, der für die gleichen Parameterwerte wie die Widerstandsänderung berechnet wurde. Zur besseren Darstellung kam ein reduzierter Maßstab zur Verwendung.

Meinem verehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. A. FAESSLER bin ich für sein förderndes Interesse an dieser Arbeit zu großem Dank verpflichtet. Herrn Prof. Dr. H. WELKER und den Siemens-Schuckertwerken AG danke ich für die großzügige Unterstützung und die Bereitstellung von Forschungsmitteln. Ebenso danke ich Herrn Dr. H. WEISS für die Anregung zu dieser Arbeit und für viele fruchtbare Diskussionen, Herrn P. HINI und seinen Mitarbeitern für die Anfertigung der Apparaturen und der Abbildungen, Herrn Dr. M. WILHELM und Herrn Dipl.-Chem. TH. RENNER für die Bereitstellung der Kristalle, Herrn Dr. H. PFLEIDERER und Herrn Dipl.-Phys. H. WAGINI für viele wertvolle Diskussionen, Herrn H. RIEKERT und der Rechenstelle SSW-ZEF für die Hilfe bei der Durchführung der numerischen Berechnungen und allen Kolleginnen und Kollegen, die mit Rat und Tat zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

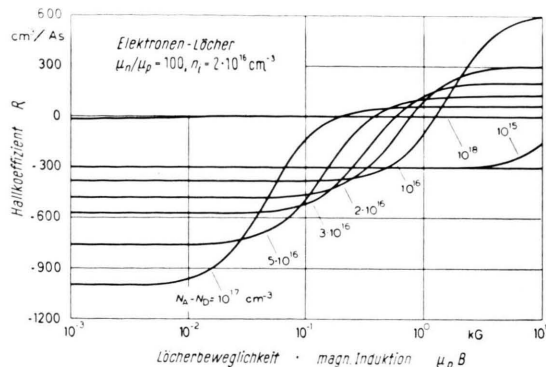


Abb. 23. Berechneter HALL-Koeffizient für p-dotiertes InSb bei Zimmertemperatur in Abhängigkeit von der magnetischen Induktion.

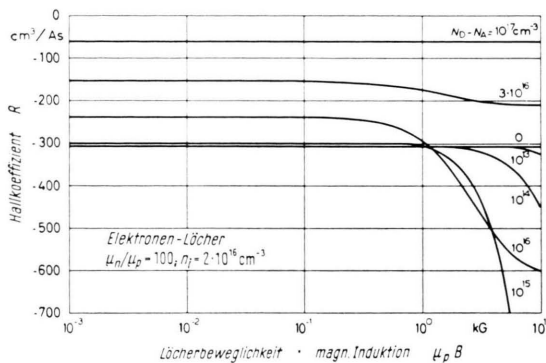


Abb. 24. Berechneter HALL-Koeffizient für n-dotiertes InSb bei Zimmertemperatur in Abhängigkeit von der magnetischen Induktion.

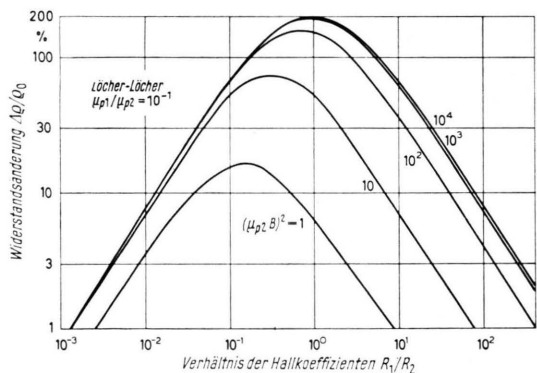


Abb. 25. Berechnete Widerstandsänderung für p-dotiertes InSb bei tiefen Temperaturen in Abhängigkeit des Verhältnisses der HALL-Koeffizienten der Teilbänder.

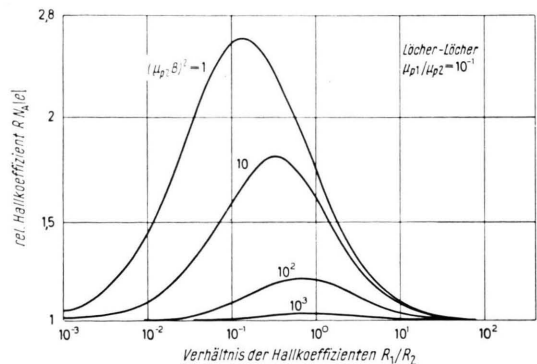


Abb. 26. Berechneter HALL-Koeffizient für p-dotiertes InSb bei tiefen Temperaturen in Abhängigkeit des Verhältnisses der HALL-Koeffizienten der Teilbänder.

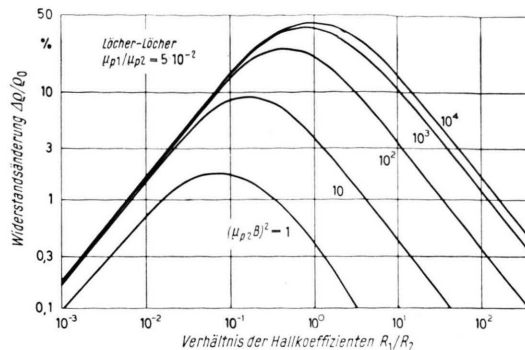


Abb. 27. Berechnete Widerstandsänderung für p-dotiertes InSb bei tiefen Temperaturen in Abhängigkeit des Verhältnisses der HALL-Koeffizienten der Teilbänder.

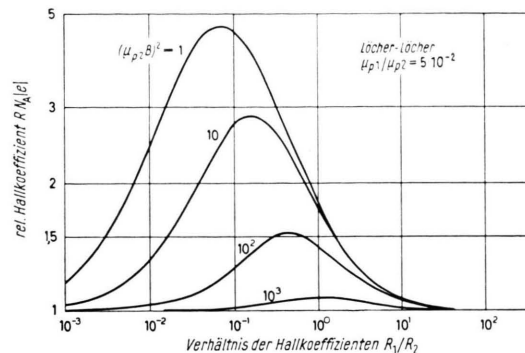


Abb. 28. Berechneter HALL-Koeffizient für p-dotiertes InSb bei tiefen Temperaturen in Abhängigkeit des Verhältnisses der HALL-Koeffizienten der Teilbänder.

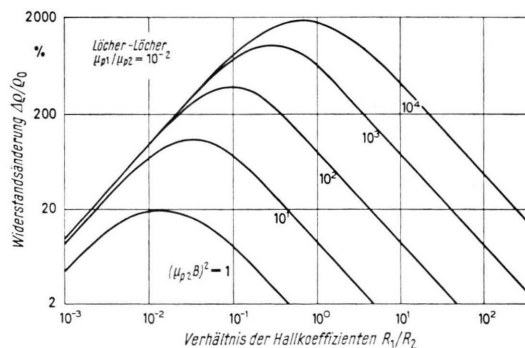


Abb. 29. Berechnete Widerstandsänderung für p-dotiertes InSb bei tiefen Temperaturen in Abhängigkeit des Verhältnisses der HALL-Koeffizienten der Teilbänder.

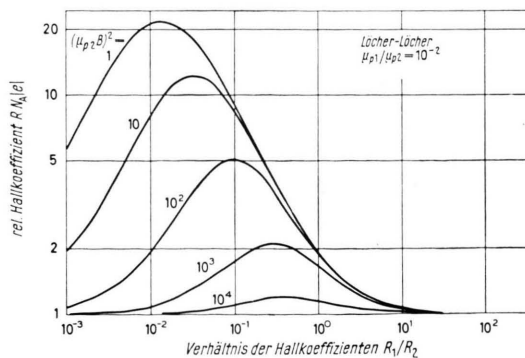


Abb. 30. Berechneter HALL-Koeffizient für p-dotiertes InSb bei tiefen Temperaturen in Abhängigkeit des Verhältnisses der HALL-Koeffizienten der Teilbänder.